

Rapport TIPE 2006
Description et modélisation des tsunamis

Emmanuel Branlard
`emmanuel.branlard@supaero.fr`

Le 12 Juillet 2006

TIPE

Sujet :

Description et Modelisations des Tsunamis

Table des Matières

Introduction	1
---------------------------	---

I. Généralités sur le phénomène de Tsunami :

I.1. Définition et caractéristiques	5
I.2. Origine des Tsunamis	7
I.3. Classification des Tsunamis	9
I.4. Risques et prévention	10
I.5. Les Tsunamis en France	12
I.6. Le tsunami du 26 décembre 2004	14

II. Notions de base de mécanique des fluides

II.1. Définitions de base	17
II.2. Conservation de la masse.	18
II.3. Classification des écoulements laminaires	19
II.4. Equations dynamiques pour les écoulements parfaits.	20

III. Modélisation physique des Tsunamis

III.1. Equations en eaux peu profondes	23
III.2. Equations en eaux profondes	24
III.3. Equations de Saint Venant	26

IV. Relation entre magnitude et hauteur initiale

IV.1. Approche énergétique	27
IV.2. relation entre magnitude et hauteur initiale	29

V. Modélisation de la propagation

V.1. Schémas de principe

V.2. Algorithmes Maple 32

VI. Méthode des différences finies

VI.1. Principe

VI.2. Algorithmes Maple 57

Conclusion 66

Références 67

Introduction

Souvent confondus avec les raz-de-marée, les tsunamis sont peu connus du grand public. L'ampleur de la catastrophe du 26 Décembre 2004 qui a fait près de 280 000 morts, a marquée les populations du globe et a suscité de vives interrogations. Cette catastrophe aurait-elle pu être évitée ?

A l'heure actuelle, les connaissances scientifiques sur le phénomène de tsunami sont limitées dues au faible nombre de cas observés. Par ailleurs, la modélisation des tsunamis requiert des modèles mathématiques compliqués nécessitant l'utilisation d'outils informatiques puissants pour pouvoir prendre en compte les nombreux facteurs intervenants dans ces équations (vent, nature du fond océanique, géométrie des côtes...).

Si la population est mieux informée sur les tsunamis, et sait, par exemple, que la mer se retire brusquement d'une dizaine de mètres quelques minutes avant l'arrivée de la vague sur les côtes, et si des progrès en matière de prévention sont réalisés, le nombre de victimes pourrait être réduit de manière considérable. Dans cette optique nous avons rédigé un document présentant le phénomène de tsunami et s'interrogeant sur les différentes descriptions et modélisations possibles des tsunamis. Une meilleure simulation numérique des tsunamis permettrait de prévenir plus rapidement les populations. Envisageant l'épreuve de T.I.P.E. comme une initiation aux professions scientifiques, j'ai souhaité découvrir différents aspects de la simulation numérique, élément indispensable à la physique de nos jours. Mes travaux auront pour but de lier la magnitude du séisme à la propagation du tsunami. Une grande partie du travail présenté relève d'initiatives personnelles, menant parfois à l'échec, confirmées d'autres fois par mon entretien ultérieur avec M. Okal(*). Pour toutes mes simulations, j'ai utilisé le logiciel Maple. Aucun travail de ce type n'a été effectué à ma connaissance sur ce logiciel et ce sont mes propres algorithmes que je présente, réalisés à partir d'aucun modèle. Les principes des modèles sont assez simples, les algorithmes parfois coûteux, l'aspect graphique simplifié, mais les résultats obtenus sont assez cohérents avec l'expérience.

I. Généralités sur le phénomène de Tsunami :

I.1. Définition et caractéristiques

a. Définition

Le terme "**tsunami**" désigne universellement le phénomène correspond à **une série de vagues océaniques pouvant atteindre de grandes amplitudes et ayant été provoquée par de brutales perturbations de la couche d'eau de l'océan** (comme un tremblement de terre, ou une explosion sous-marine). Le mot tsunami est d'origine Japonaise (SOO-NAH-MEE) et signifie littéralement "vague de port" car en effet, ce phénomène s'observe notamment dans les ports, les baies ou sur les plages. Ce sont les tsunamis générés par des tremblements de terre qui peuvent être les plus dévastateurs car l'énergie générée lors de ces phénomènes permet à la vague de traverser les océans.

Le terme raz-de-marée, avec lequel il est parfois confondu, désigne les perturbations de la surface de l'océan dues à des causes météorologiques (tempêtes, cyclones, etc.).

b. Trois phases

Durant un tsunami, nous pouvons distinguer trois phases :

- **Une phase de déclenchement** correspondant à une perturbation brutale de l'océan, qui se manifeste par un déplacement rapide d'un important volume d'eau. L'eau, de part ses propriétés fluides, va alors compenser cette déformation : c'est la naissance de la vague.
- **Une phase de propagation** correspondant donc à la propagation de la vague à travers l'espace (l'océan).
- **Une phase de déferlement**, où la vague, arrivant sur les côtes, se "soulève" et dissipe son énergie en déferlant sur le rivage.

c. Caractéristiques de la vague :

➤ **Période :**

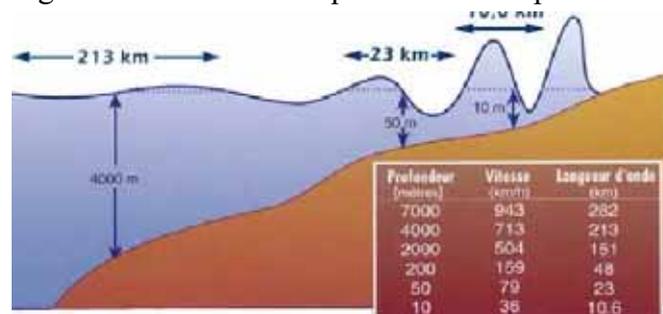
(Temps s'écoulant entre deux crêtes successives de la vague)

Les vagues générées par le vent ont des périodes de 5 ou 20 secondes tandis que les périodes des tsunamis sont comprises **entre 5 et 90 minutes** suivant les cas !

➤ **Longueur d'onde :**

Les vagues normales ont d'ordinaire des longueurs d'onde comprises entre 100 et 200 mètres.

La longueur d'onde des vagues des tsunamis est quant à elle comprise entre **10 et 500 km**.



➤ Vitesse et amplitude :

Au large (en eaux profondes) la vitesse de propagation des vagues est d'environ **800 km/h**. Les vagues peuvent donc traverser le pacifique en moins de 15 heures.

Le tsunami généré lors d'un séisme sur la côte chilienne en 1995 à Antofagasta, (magnitude de 8,1 sur l'échelle de Richter) a ainsi atteint la Polynésie française, distante d'environ 8000 kilomètres, au centre de l'océan Pacifique, environ 10 heures après sa génération au Chili. À cette distance, l'énergie des vagues a encore été suffisante pour provoquer des inondations importantes dans certaines baies, jusqu'à plus de 300 mètres à l'intérieur des terres.

La hauteur des vagues au large est faible (quelques centimètres ou dizaine de centimètres), si bien que celles-ci sont indétectables à bord des bateaux.

Lorsqu'elles atteignent le littoral où la profondeur est faible, les vagues sont "freinées", avoisinant **les 36 km/h**, ce qui engendre l'augmentation de la hauteur de la vague. Cet effet peut être amplifié par la présence d'une baie, d'un lagon ou d'un port qui canalise la vague lorsqu'elle pénètre dans les terres. **Les plus grands tsunamis connus ont atteint une amplitude de 30 mètres, mais des tsunamis de 3 à 6 mètres de hauteur** peuvent être extrêmement destructeurs.

L'équation caractéristique des tsunamis permettant de relier vitesse et profondeur est :

$$c = \sqrt{gh} \quad (\text{I.1.1})$$

où c est la célérité de la vague

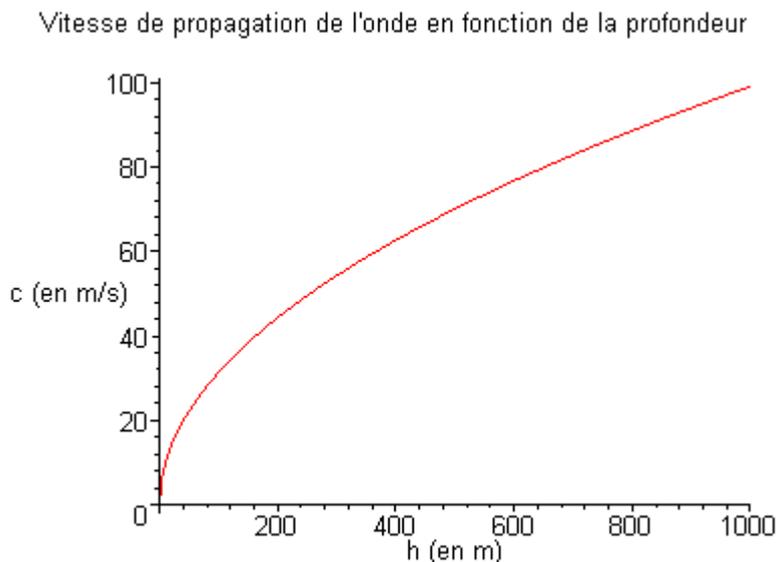
g est l'accélération de la pesanteur

h est profondeur du fond océanique.

Cette équation sera démontrée dans la partie III .1

Avec Maple :

```
> plot(sqrt(g*h), h=0..1000, labels=["h (en m)", "c (en m/s)"] ,
title="Vitesse de propagation de l'onde en fonction de la
profondeur");
```



➤ **Energie de la vague**

L'énergie totale de la vague correspond à l'énergie mécanique, c'est à dire la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, du système fluide considéré.

Lors de la phase de déclenchement, le travail fournit pour déplacer le volume d'eau est presque intégralement transmis à la vague.

En mer profonde, le déplacement des vagues peut se faire à grande vitesse, ce qui se traduit par une grande énergie cinétique et une faible énergie potentielle.

A l'approche des côtes, les vagues sont ralenties par les effets de fond et il se produit alors un transfert d'énergie cinétique en énergie potentielle car l'énergie mécanique est globalement conservée. C'est cette augmentation de l'énergie potentielle qui va permettre un tel soulèvement de la colonne d'eau à l'approche des côtes.

I.2. Origine des Tsunamis

a. Origine des tsunamis

La vague d'un tsunami peut-être générée par les phénomènes suivants :

- **Tremblements de terre**
- **Eruptions volcaniques sous-marines**
- **Glissements de terrains**
- **Chutes de météorites**
- **Explosions nucléaires**

Une vague de tsunami est donc générée par des effets de gravité tandis qu'une vague classique est générée par l'action du vent.

b. Les tsunamis d'origine tectonique

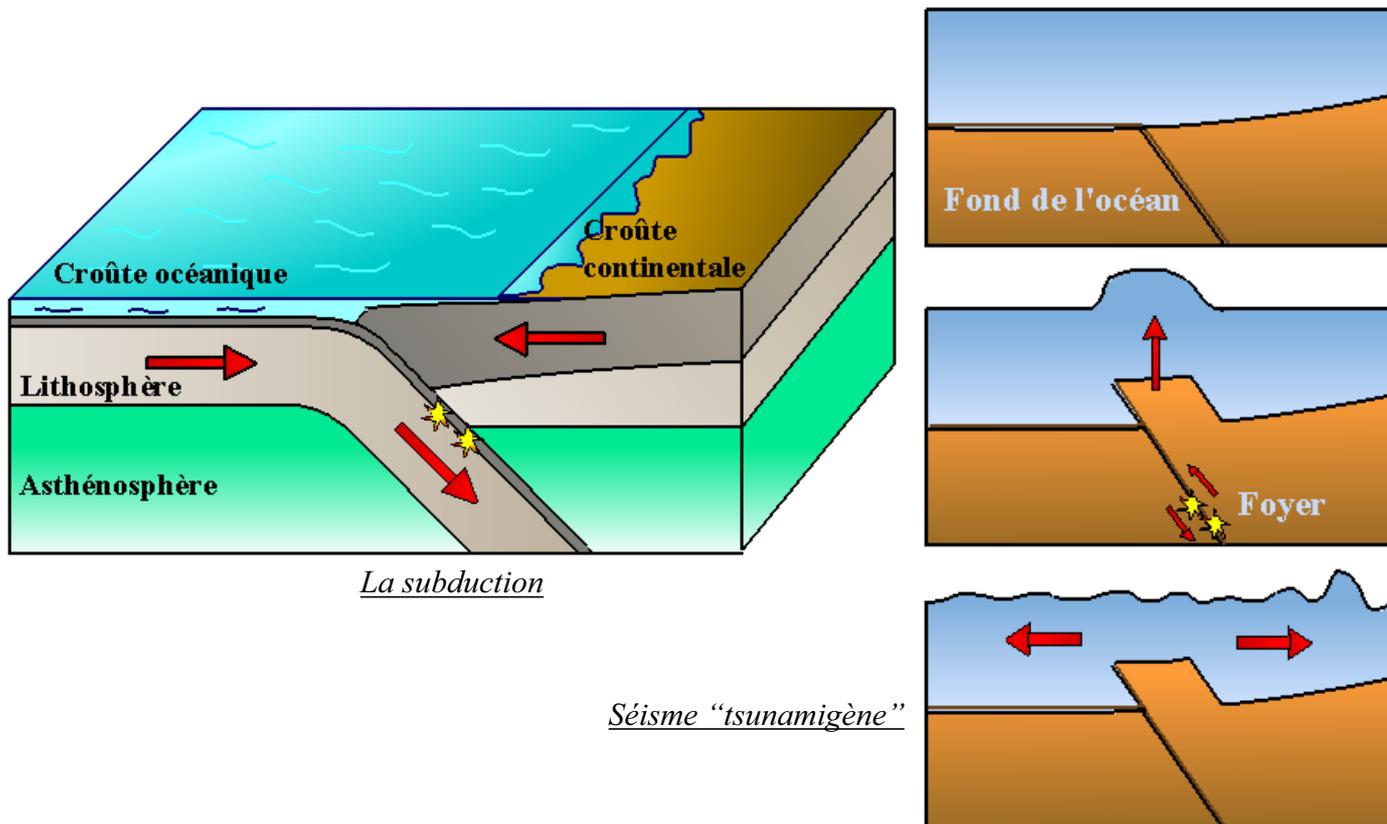
Les tsunamis générés par des tremblements de terre représentent **85% des cas** de tsunami observés.

La plupart des séismes sont provoqués par des mouvements le long des failles associées aux frontières des plaques lithosphériques sur l'asthénosphère. Souvent, ces séismes ont lieu dans les zones de subduction, à faibles profondeurs (moins de 70km), lieux où la plaque océanique s'enfonce sous la plaque continentale.

Les importantes forces de compressions présentes entre les différentes plaques, permettent à la couche terrestre d'emmagasiner de l'énergie. Au cours d'une rupture sismique celle-ci se libère et est transmise au fond de l'océan.

Toutefois, **seuls les séismes dont le foyer et la surface de rupture de la faille sont situés sous l'océan, et créant une perturbation verticale (normale ou inverse) de la surface de l'eau sur une grande surface sont à l'origine de tsunami.** En effet, d'important séismes en océan mais non dirigés selon la verticale ne provoquent pas de tsunami.

L'océan est considéré comme une mince couche se mettant en mouvement sur l'ensemble de son épaisseur. Cette déformation est considérée comme instantanée car la vitesse de rupture de la faille est environ dix fois supérieure à la vitesse de propagation des ondes.



c. [Éruptions volcaniques](#)

Il existe de nombreux volcans le long des zones côtières notamment dues aux zones de subduction. Ces volcans peuvent provoqués des tsunamis de plusieurs manières. Des éruptions explosives peuvent rapidement provoquer des glissements de terrains, projeter d'importants blocs de roches dans l'eau, et même provoquer des avalanches dont les débris peuvent se déverser dans l'océan.

d. [Explosions sous-marines dues à des essais nucléaires](#)

Entre 1940 et 1950, des tests nucléaires réalisés par les Etats-Unis ont générés des tsunamis dans les îles Marshall.

e. [Impacts météorites](#)

Aucun exemple de tsunamis générés par des impacts météorites n'a été vécu à ce jour (heureusement), mais de nombreux cratères témoignent d'impacts ayant pu générer des tsunamis il y a 65 Millions d'années dans la péninsule du Mexique, à la fin du créacé.

f. Les tsunamis générés par des glissements de terrain

Des glissements de terrains peuvent également provoquer des tsunamis. Ceux ci sont souvent provoqués par des tremblements de terre ou des éruptions volcaniques(coulée de lave dans l’océan), ou de simples effondrements ou avalanches qui peuvent facilement atteindre des millions de mètre cube de matière, se jetant dans l’eau. Ces tsunamis peuvent provoquer des dégâts similaires à ceux provoqués par des tremblements de terres (vagues de 40m en Alaska en 1958).

I.3. Classification des Tsunamis

a. L'échelle de magnitude : l'échelle d'Imamura et Ida

La magnitude m du tsunami est donnée par
$$m = \frac{\ln H_{\max}}{\ln 2} \tag{I.3.1}$$

avec H_{\max} la hauteur maximale du tsunami à la côte.

Valeurs de m	Hauteur des vagues (en m)		Conséquences
	au large	la plus forte	
-1	Insignifiante	insignifiante	Tsunami mineur
0	0.10	1	Aucun préjudice
1	0.25	2	dégâts aux maisons et aux navires
2	0.5	4-6	destruction de navires, pertes humaines
3	1	10-20	destruction des côtes sur env.200 km.
4	2	50	destruction des côtes sur env.500 km.

b. L'échelle d'intensité ou échelle de Soloviev

Intensité :	
I	très légère, l'onde est faible perceptible uniquement sur les marégraphes
II	légère, l'onde est remarquée par les familiers de la mer sur les rivages très plats
III	assez forte, l'onde inonde les côtes en pente douce, les embarcations légères sont échouées, l'écoulement dans les estuaires est renversé
IV	forte, le rivage est inondé, les constructions sur la côte sont dégradées, la côte est jonchée de débris flottants.
V	très forte, inondation générale, destruction des bâtiments, affouillement des terres, pertes humaines.
VI	désastreuse, destruction des structures, inondation sur une grande profondeur, dommages aux navires, nombreuses victimes

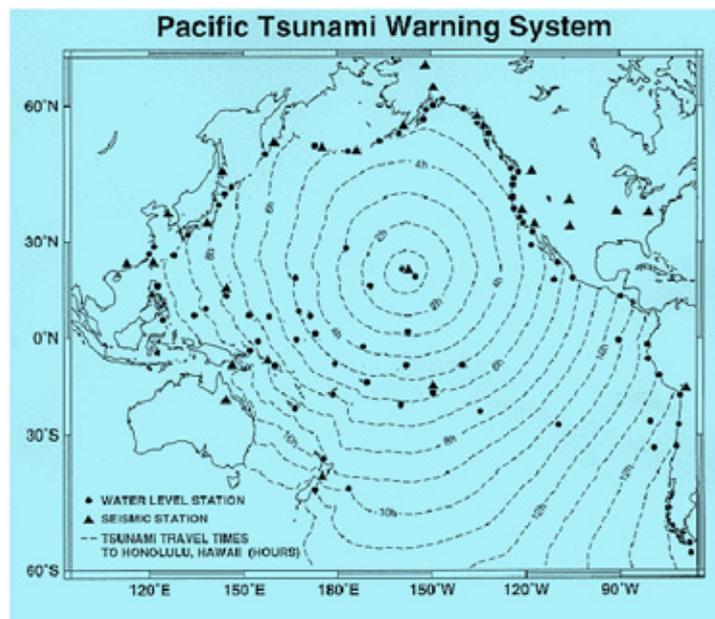
I.4. Risques et prévention

a. Alerte et prévention.

Les zones à risque relativement éloignées des lieux de tremblement de terre pouvant potentiellement générés des tsunamis disposent dans la majorité des cas, du temps nécessaire pour alerter la population et faire évacuer les côtes (tsunami à plus de 750 km des côtes). **Il peut se dérouler une à deux heures entre le tremblement de terre et le moment où le tsunami atteint les côtes.** C'est le cas par exemple pour les îles d'Hawaï, qui grâce à un système d'alerte développé (The Pacific Tsunami Warning Center) ont pu alerter la population suffisamment tôt et ainsi sauver des vies dans plusieurs cas de tsunami. Ce centre d'alerte situé à Hawaï fut fondé en 1968 et fut le premier du genre.

Un réseau international de stations situées à divers points stratégiques de l'océan, dotées de sismographes, envoient par satellites leurs informations au centre de traitement situé à Hawaï.

Ces informations sont complétées par des **capteurs de pression**, insensibles à la houle, installés sur le fond de l'océan, pouvant mesurer des tsunamis inférieurs au centimètre. Au total, ce système est équipé d'une trentaine de stations sismiques et de 78 marégraphes



Ci-dessus, la localisation des différentes stations sismiques et marégraphes

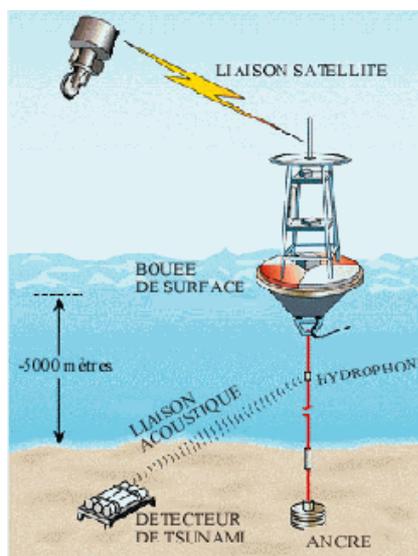


Ci-contre, une bouée DART (Deep-ocean Assessment and Reporting of Tsunami)

Si un tremblement de terre est détecté, le centre prend en compte toutes les informations qui lui ont été envoyées, pour localiser le séisme, estimer sa magnitude, et enfin savoir s'il peut

générer un tsunami. **Cette opération demande environ une heure avant que des messages d'alertes précis soient envoyés.** D'autres centres ont été ouverts au Japon, en Alaska, en Polynésie française (Tahiti) et au Chili pour pouvoir assurer un système d'alerte plus rapide.

Le système est composé de capteurs de pression, de marégraphes et de stations sismiques. Toutes les informations sont envoyées par satellites au Pacific Tsunami Warning Center.



Depuis 1948, 75% des alertes ont été fausses car le système de détection n'était pas suffisamment fiable. Aujourd'hui, **les mesures se font par satellites et peuvent détecter une différence du niveau de la mer de 1 cm**, par conséquent son efficacité ne peut être contestée : au Japon, avant l'établissement de ce système, 14 tsunamis ont provoqué la mort de 6000 personnes, alors que depuis son établissement, 20 tsunamis ont provoqué 215 victimes. Toutefois, le nombre de victimes suite au tsunami généré par le séisme de Sumatra nous fait prendre conscience de l'importance d'améliorer nos systèmes actuels de détection de tsunami, pour éviter que de telles catastrophes se reproduisent. Le lieu du séisme ayant été trop rapproché des côtes, les systèmes n'ont pas eu suffisamment de temps pour donner l'alerte. Sachant que la mise en place d'un système de repérage de tsunami dans l'océan indien aurait coûté seulement 10% des dégâts occasionnés par le raz-de-marée du 26 décembre dernier, l'installation de stations de repérage (prix moyen entre 250 000 et 500 000 Euros) peut s'avérer une opération économiquement rentable. La conclusion vient d'elle même: il faut étendre ces réseaux d'alerte à toutes les zones côtières où la sismicité est importante. C'est le cas de l'océan indien, de la mer Méditerranée et des Antilles mais aussi de certaines parties de l'océan Atlantique où les tsunamis pour être moins fréquents, n'en sont pas moins meurtriers (comme fut le cas à Lisbonne (Portugal), en 1755). 30 nouvelles bouées DART viendront s'ajouter d'ici 2007 aux six déjà installées dans le Pacifique. Toutefois, cette technique demande des investissements importants qu'il faut relativiser. En effet, une évacuation d'une ville côtière est chère : par exemple, en 1986, l'évacuation d'Honolulu a coûté 30 millions de dollars alors qu'il n'y a pas eu de tsunami.

Des efforts doivent également être fait de la part des autorités locales pour mieux informer la population (sensibilisation dans les écoles, simulation d'alertes...). En effet, chacun doit savoir que dans la plupart des cas, l'arrivée d'un tsunami se caractérise par des comportements particuliers des vagues quelques minutes avant son arrivée. **Les vagues deviennent un peu plus importantes, puis soudainement la mer se retire de plusieurs mètres. Il faut tout de suite**

évacuer et se placer en hauteur, dans des lieux sûrs.



30 nouvelles bouées DART (en rouge) viendront s'ajouter d'ici 2007 aux six bouées déjà installées dans le Pacifique (en jaune).

b. Risques et dégâts

Les principaux dégâts sont produits par la vague du tsunami. La vague peut entraîner avec elle d'importants débris et les projeter violemment, peut provoquer d'importantes érosions qui affaiblissent les structures des bâtiments le long des côtes, et peut altérer les installations de gaz et d'électricité provoquant des incendies. A long terme, si les mesures sanitaires sont insuffisantes, l'altération des canalisations d'eau potable peut entraîner des maladies, des pénuries alimentaires peuvent conduire à la famine.

Durant le dernier siècle **95 tsunamis destructifs** ont été recensés **entraînant la mort de 360 000 personnes, dont plus de 280 000 pour le tsunami dévastateur du 26 Décembre 2004.**

I.5. Les Tsunamis en France

Les tsunamis en France ne sont pas rares. En effet il y a de nombreux exemples de tsunamis qui ont frappés certaines régions de la Méditerranée. Les risques de tsunamis dans l'Atlantique sont plus réduits car, même si certaines zones sont caractérisés par une forte activité sismique, il ne s'agit pas de séismes « tsunamigènes ». Toutefois, en 1755 un tsunami meurtrier a frappé Lisbonne et a fait 30 000 victimes.

Nous pouvons distinguer quatre régions associées à une forte activité sismique dans la Mer Méditerranée. La zone qui s'étend des îles ioniques à l'ouest de la Grèce jusqu'à la côte de Crète et les îles Rhodus et une zone à forte activité sismique « tsunamigène ». Ensuite vient la zone allant des côtes du Nord de la mer Adriatique jusqu'aux îles Ioniques comprenant l'est et l'ouest des côtes de l'Adriatique. Une troisième zone comprend la région côtière d'Israël et de Syrie, et une quatrième commence à Marseille et passe le long de la côte Italienne et se termine au niveau de la côte nord de Sicile. Les zones les plus risquées sont les deux premières citées. En ce qui concerne le territoire français, les zones potentiellement à risques ont une faible activité sismique. Cela explique

le fait que les tsunamis ont été peu étudiés en France.



Toutefois, le risque est présent. Le 16 Octobre 1979 un tsunami généré par un glissement de terrain eut lieu à Nice et fit plusieurs victimes.

La plupart du temps les tsunamis ne se propagent pas très loin (une dizaine de km) et restent très localisés.

En France les régions sismiques sont relativement proches des côtes. Par conséquent les vagues de tsunamis peuvent arriver rapidement, ce qui peut s'avérer dangereux compte tenu du nombre croissant de touristes dans cette région.

Informations sur les tsunamis recensés depuis 1564				
Année	Date	Origine	Lieux touchés	Intensité
1564	20 Juillet	Sismique	Nice, Antibes Villefranche	
1775	22 Octobre	Sismique	Corse	3-4
1808	2 Avril	Sismique	Marseille	
1812	28 Juin		Marseille	1-2
1818	23 Février	Sismique	Antibes Var	3-4
1831	26 Mai	Sismique	Nice	2-3
1844	17 Juillet	Météo ?	Sète	3
1844	22 Octobre	Météo ?	Sète	
1845	20 Juin	Météo ?	Sète	
1846	14 Août	Sismique	Marseille	3
1846	3 Décembre	Sismique	Marseille	3
1849	20 Juillet	Météo ?	Marseille	3
1854	29 Février		Mer Ligurienne	
1854	29 Décembre	Sismique	Nice	
1855	18 Mai		Nice	3
1862	18 Mars	Sismique	Nice	
1862	24 Novembre	Sismique	Nice	3-4
1876	23 Décembre		Nice	4

1885	16 Janvier	Météo	Nice Cannes Villefranche	
1886	11 Novembre	Pluie	Fréjus Nice	
1886	17 Décembre		Nice	
1887	23 Février	Sismique	Antibes Nice (1-3m)	3
1924	9 Janvier		Mer Ligurienne	
1979	16 Octobre	Glissement de terrain	Antibes- Nice (3m)	4

Bilan	
Nombre total d'évènements	25
Origine sismique	12
Glissement de terrain	1
Inconnus	12
Magnitude moyenne des tremblements de terre "tsunamigène"	6.8
Intensité moyenne des tsunamis	3.1
Fréquence d'apparition	18 ans

I.6. Le tsunami du 26 Décembre 2004

a. La structure des plaques en Indonésie

L'Indonésie est une zone sismique réputée. Elle fait partie de la ceinture de feu (ligne de volcans) du Pacifique et de l'Océan Indien. Ces alignements volcaniques marquent les limites des plaques.

En fait, contrairement à la plupart des pays qui se situent sur cette ceinture de feu, et mettent en jeu seulement deux plaques lithosphériques, l'Indonésie est sur la limite non pas de deux mais de trois plaques. L'Indonésie et toute l'Asie du Sud-Est (Sundaland) subies des forces de compression de la part de la " plaque indienne " qui se déplace vers le Nord à la vitesse de 6 à 7 centimètres par an et de la part la " plaque pacifique " qui se déplace vers l'Ouest à la vitesse de 8 à 9 centimètres par an. Il y a donc régulièrement des séismes engendrés par ces mouvements. Mais curieusement cette zone a enregistré peu de Tsunamis dans le passé. Celui de Sumatra à donc surpris les populations et les responsables.

La plaque indienne plus lourde, s'enfonce sous la plaque continentale asiatique qui est plus légère. La densité des roches océaniques est, en effet, plus forte que celle des roches continentales : c'est le phénomène de subduction

b. Le Séisme de Sumatra

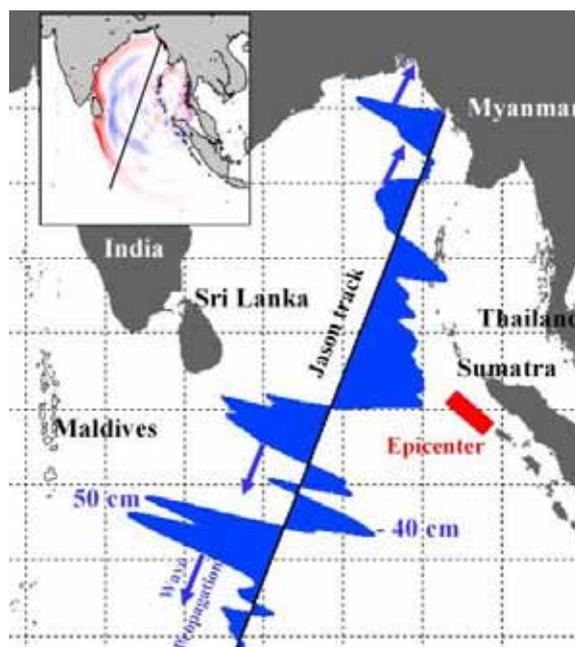
Le tremblement de terre a été initialement évalué à une magnitude de 6,8 et alors révisé à 8,5 et enfin 8,9 pour finir à 9,0 sur l'échelle de Richter par l'institut géologique américain. L'épicentre

fut localisé à $3,298^{\circ}$ N, $95,779^{\circ}$ E, soit à 160 kilomètres à l'ouest de Sumatra, à une profondeur de 30 kilomètres. Ce tremblement de terre est l'un des plus violents jamais enregistrés dans le monde. Seuls quatre séismes connus et mesurés ont eu une intensité égale ou plus violente.

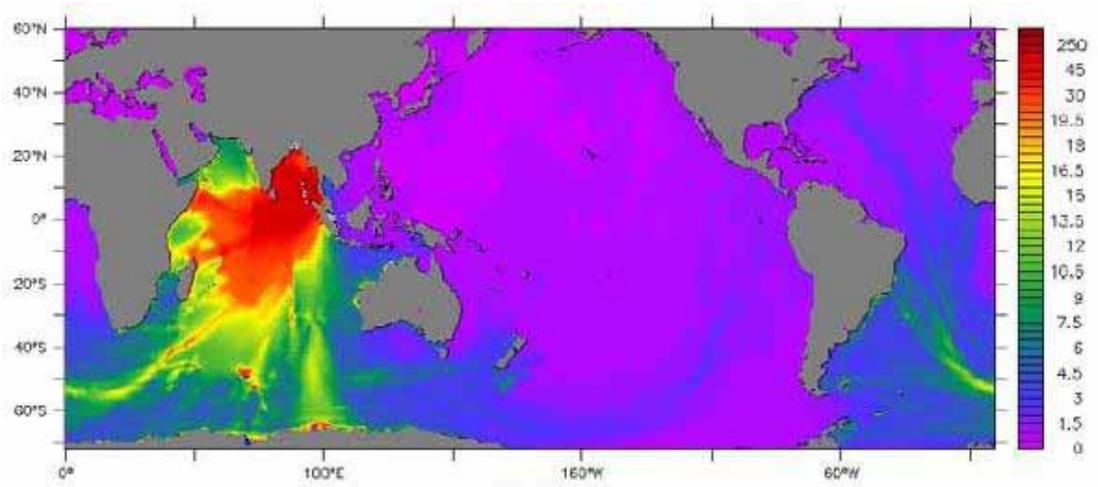
Le séisme de Sumatra a provoqué un décollement de la plaque asiatique sur une surface de plus de 400 km de long et 100 km de large. La rupture c'est produite à une vitesse de $2\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Ce panneau décollé est remonté vers le haut sur plus de 5 mètres et s'est déplacé sur une distance de plus de 10 mètres, le long du plan de subduction. Ce déplacement peut paraître minime mais il a déplacé vers le haut un volume d'eau énorme (une colonne d'eau de 1 à 2 mètres de haut sur une surface équivalente à la superficie de la Suisse). Ce déplacement d'eau vers le haut a déclenché le Tsunami lequel s'est propagé perpendiculairement à la faille, c'est-à-dire vers l'Est (Sumatra, Thaïlande, etc...) et vers l'Ouest (Inde, Sri Lanka, Maldives et Afrique), à la vitesse de près de 800 km/heure.

c. Le tsunami

Les satellites ont enregistré une élévation maximale de la surface de l'océan (par rapport à la normale) de 50 centimètres à environ 1 200 kilomètres au sud du Sri Lanka sur la principale crête du tsunami, au sud du golfe du Bengale. Il a été suivi d'un creux de 40 centimètres au-dessous de la valeur normale. La distance d'une crête à la suivante était d'environ 800 kilomètres. La première vague a été suivie d'une seconde dont la hauteur était de 40 centimètres au-dessus de la normale. Près du fond du golfe, deux vagues avec des crêtes de 40 cm et 20 cm au-dessus de la normale, approchèrent les côtes de Myanmar. S'étendant, à travers le golfe du Bengale, de la zone du tremblement de Terre à l'ouest de Sumatra, ces vagues ont, par la suite, atteint les eaux peu profondes le long des côtes de Sumatra, du Sri Lanka, de la Thaïlande et du sud de l'Inde. Leur vitesse a diminué passant de 800 km/h à environ 32 km/h tout en se transformant en vague d'une amplitude de 50 cm, en un mur d'eau de 10 mètres (certains ont parlé de 25 m) de hauteur possédant une très grande puissance destructive. Le bilan fut de 280 000 morts.



Failles de Sunda et déplacements de celle-ci.



Amplitude maximale de la vague en centimètre

II. Notions de base de mécanique des fluides

II.1. Définitions de base

a. Fluide :

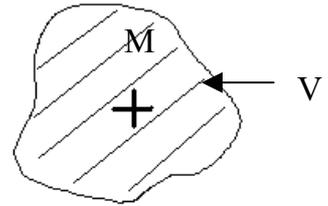
On appelle fluide **tout système composé de nombreuses particules libre de se mouvoir les unes par rapport aux autres** (fluide \Leftrightarrow liquide ou gaz), contrairement au solide où les différentes parties constitutives sont rigidement liées entre elles.

Quand l'effet de viscosité dépasse celui de pression on parle de fluide (ex : verre en fusion, miel liquide)

b. Grandeurs nivelées :

A l'échelle microscopique, les grandeurs varient énormément (vitesse, masse volumique...), par conséquent il faut niveler ces grandeurs, c'est à dire en faire la moyenne sur le volume particulaire.

On pourra alors parlé de grandeurs nivelées. ex $\rho(M,t)$ désignera la masse volumique moyenne du volume particulaire V contenant le point M à l'instant t .



c. Description d'Euler :

La description d'Euler consiste à **décrire la répartition des vitesses \vec{v} dans l'ensemble du fluide à un instant t donné en se plaçant dans un repère fixe**. Cette description donne une vision globale de l'écoulement. Ainsi $\vec{v}(\vec{r},t)$ désigne la vitesse de la particule de fluide qui coïncide à l'instant t avec le point fixe M de vecteur position $\vec{r} = \overline{OM}$ (exemple : le point de vue d'Euler est celui d'un observateur sur un pont)

Le point de vue d'Euler fait appel à la notion de champs, avec deux champs particuliers:

- le camp vectoriel des vitesses $\vec{v}(\vec{r},t)$

- le champ scalaire de masse volumique $\rho(\vec{r},t)$

Cette description est à confronter avec la description lagrangienne qui consiste à étudier le fluide dans le référentiel mobile de celui-ci.

d. Champ de masse volumique :

On considère une particule de fluide qui est en $M(\vec{r})$ à l'instant t , puis en $M'(\vec{r}')$ à l'instant $t+dt$.

En coordonnées cartésiennes $\vec{r} = (x, y, z)$.

La masse volumique $\rho(\vec{r},t) = \rho(x, y, z, t)$ varie de

$$D\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + \frac{\partial\rho}{\partial x} dx + \frac{\partial\rho}{\partial y} dy + \frac{\partial\rho}{\partial z} dz \quad (\text{II.1.1})$$

$$\text{Or : } d\vec{r} = \vec{v}.dt \Leftrightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} dt$$

Donc (II.1.1) devient : $D\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + \frac{\partial\rho}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial\rho}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial\rho}{\partial z} v_z dt = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial\rho}{\partial z}$,

On définit au passage l'opérateur gradient : $\overrightarrow{grad} = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ avec la notation « nabla » : $\vec{\nabla}$ qui à

la même signification que \overrightarrow{grad} .

On forme ainsi l'opérateur $\vec{v}.\overrightarrow{grad}$, et alors :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\rho \quad (\text{II.1.2})$$

Le premier terme traduit l'écoulement du temps tandis que le second traduit l'écoulement du fluide.

On constate que l'équation (II.1.2) est indépendante du système de coordonnées choisies.

On peut dès lors définir un opérateur dérivée totale : $\frac{D*}{Dt} = \frac{\partial*}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})*$

e. Champ de vitesse :

Dans un repère cartésien $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ on a $\vec{v} = v_x(x, y, z, t).\vec{e}_x + v_y(x, y, z, t).\vec{e}_y + v_z(x, y, z, t).\vec{e}_z$

On calcule identique nous donne :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} \quad (\text{II.1.3})$$

L'équation (II.1.3) définit ainsi l'**accélération particulaire** où le terme $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$ est l'accélération convective. Celle-ci traduit le caractère non uniforme de la vitesse.

II.2. Conservation de la masse

Hypothèses de travail : on se place dans le cas d'un fluide en mouvement, traversant une surface fictive fixe dans le référentiel considéré.

L'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0} \quad (\text{II.2.1})$$

où $\rho \vec{v}$ représente la densité de courant de masse (en $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$)

et où l'opérateur div s'écrit : $\boxed{\text{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}}$ (avec \cdot le produit scalaire) et est

associé à toute modification du volume particulaire. Ainsi, $\text{div}(\vec{v}) = 0$ traduit le fait que le volume se conserve au cours du temps.

II.3. Classification des écoulements laminaires

On appelle écoulement laminaire tout écoulement régulier dans l'espace et dans le temps.

a. Ecoulement stationnaire (ou permanent)

Dans un tel écoulement, tous les champs eulériens sont indépendants du temps.

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \text{ et } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (\text{II.3.1})$$

Remarque : l'équation de continuité s'écrit $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ se qui traduit le caractère conservatif de la densité de courant de masse.

b. Ecoulement incompressibles

Dans un tel écoulement **la masse volumique d'une particule est constante** au cours du mouvement. C'est à dire :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (\text{II.3.2})$$

ou encore $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \rho = 0$.

Ce type d'écoulement concerne surtout les liquides car ils subissent de faibles variations de pression.

Conséquence : on sait que $\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho$, donc dans l'hypothèse d'un écoulement incompressible, **l'équation de conservation de la masse** s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \rho = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.3.3})$$

Soit :

$$\boxed{\text{div}(\vec{v}) = 0} \quad (\text{II.3.4})$$

Remarque, ceci équivaut à : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

Donc le volume particulaire se conserve au cours de l'écoulement, le débit de volume est conservatif.

c. Écoulement irrotationnel (ou potentiel ou non-tourbillonnaire)

Dans un tel écoulement, le champ de vitesse satisfait à la condition :

$$\overline{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \tag{II.3.5}$$

où *rot* est l'opérateur définit par :

$$\overline{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(avec \times et \wedge représentant le produit vectoriel en notation anglo-saxonne et européenne)

Cet **opérateur est associé à une rotation locale du fluide**. Ainsi (II.3.5) traduit le fait que la particule de fluide ne tourne pas sur elle même.

Conséquence :

Si l'équation (II.3.5) est vérifiée, il existe une fonction $\Phi(\vec{r}, t)$ telle que $\vec{v} = -\overline{grad}\Phi$ appelée **potentiel des vitesses**. (car $\overline{rot grad} = 0$)

Cas particuliers :

Écoulement stationnaire irrotationnel : $\Phi(\vec{r})$ (ne dépend pas de t)

Écoulement incompressible irrotationnel : $\Delta\Phi = 0$ (laplacien)

II.4. Equations dynamiques pour les écoulements parfaits

a. Écoulement parfait :

Un écoulement est parfait si tous les phénomènes dissipatifs y sont négligeables. En particulier, la viscosité est nulle. $\eta = 0$

Nouvelle expression de l'accélération :

On a vu que $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{grad})\vec{v}$

Vérifions que $(\vec{v} \cdot \overline{grad})\vec{v} = \overline{grad} \frac{v^2}{2} + (\overline{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v}$ avec $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$$\overline{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + (\overline{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} + \begin{pmatrix} v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ v_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{pmatrix}$$

$$\overline{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + (\overline{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v}$$

Conclusion : Désormais on peut utiliser :

$$\vec{a} = \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} + \overline{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + (\overline{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (\text{II.4.1})$$

b. Champs de forces

Forces en volume :

$$d\vec{F} = \vec{f} d\tau \quad (\text{II.4.2})$$

où \vec{f} est la force massique. (exemple pour un champ de pesanteur $\vec{f} = \vec{g}$)
et où $d\tau$ représente le volume sur lequel la force agit.

Forces de pression :

$$\text{Pour un élément de surface } dS : \quad d\vec{F}_p = -P d\vec{S}$$

Ce qui s'écrit pour le système entier :

$$d\vec{F}_p = -\overline{\text{grad}} P d\tau \quad (\text{II.4.3})$$

où $-\overline{\text{grad}} P$ est la force volumique de pression donc $-\frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}} P$ est la force massique de pression

c. Equation d'Euler :

On applique le **Principe fondamentale de la dynamique** au système {particule de fluide de masse dm }

$$dm \vec{a} = d\vec{F} + d\vec{F}_p \quad (\text{II.4.4})$$

(II.4.2)(II.4.3)(II.4.4) impliquent après division par $\rho d\tau$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \frac{v^2}{2} + (\overrightarrow{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} P \quad (\text{II.4.5})$$

L'équation non linéaire (II.4.5) est l'**Equation d'Euler** appliquée pour l'écoulement parfait d'un fluide. On appelle souvent cette équation, l'**équation de conservation du moment**.

On remarque que si le fluide est au repos dans le champ de pesanteur en référentiel galiléen, on retrouve la loi de l'hydrostatique : $\overrightarrow{grad} P = \rho \vec{g}$

Remarque :

En conservant la première expression de l'accélération on trouve :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} P \quad (\text{II.4.6})$$

d. Equation de Navier-Stokes

Ces équations prennent en compte la viscosité.

Dans le cas particulier d'un écoulement incompressible on a :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \frac{v^2}{2} + (\overrightarrow{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} P + \frac{\eta}{\rho} \overrightarrow{\Delta} \vec{v} \quad (\text{II.4.7})$$

e. Equation de Bernoulli

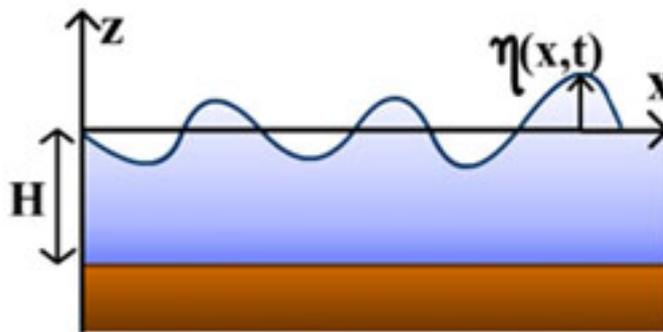
Il s'agit de la forme intégrée de l'équation d'Euler.

On fait ici l'hypothèse que les forces massiques appliquées dérivent d'une énergie potentielle massique e_p .

$$\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + \frac{v^2}{2} + e_p + \int \frac{1}{\rho} dP = \text{constante} \quad (\text{II.4.8})$$

III. Modélisation physique des Tsunamis

Dans cette partie nous nous intéresserons à la modélisation des tsunamis en nous plaçant dans le cadre de travail suivant :



Hypothèses :

- le fluide est parfait (cf II.4)
- le fluide est irrotationnel dans le champ de gravitation terrestre
- la pression atmosphérique en surface est uniforme (supposée constante)
- le champ de gravitation est uniforme et permanent
- on néglige les forces de contraintes dues au vent sur l'eau

Notation :

- Le champ vecteur vitesse (point de vue d'Euler cf II.1), sera noté $\vec{u}(x, y, z, t) = (u, v, w)$ où u, v, w sont les coordonnées de ce vecteur dans la base de projection cartésienne.

III.1. Equations en eaux peu profondes

Soit l'équation d'Euler (II.4.6) sous la forme suivante :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{g} \quad (\text{III.1.1})$$

ici $\vec{F}_{ext} = \vec{g}$ représente la résultante des forces extérieures massiques appliquées au fluide.

La composante sur z de cette équation donne :

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \quad (\text{III.1.2})$$

La composante sur x est :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{III.1.3})$$

Ces équations sont très dures à résoudre principalement parce qu'elles sont **non linéaires**. Pour contourner ce problème on applique les **hypothèses restrictives dites des eaux peu profondes (ou encore Shallow water)**. Cela consiste à **considérer que la variation de la vitesse sur la composante z est négligeable**. Ainsi on considère que l'équilibre hydrostatique est maintenu au cours du temps. Ceci, est particulièrement vrai pour les ondes de grandes longueurs d'onde et de faible amplitude que l'on peut trouver durant la phase de propagation des tsunamis.

L'hypothèse « shallow water » donne

$$\boxed{\frac{Dw}{Dt} \approx 0} \quad (\text{III.1.4})$$

On rappelle que $\frac{D*}{Dt} = \frac{\partial *}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) *$

La solution de l'équation (III.1.2) est :

$$\boxed{P - P_0 = \rho g(h - \eta)} \quad (\text{III.1.5})$$

En différentiant cette équation en fonction de x on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III.1.6})$$

En combinant cette équation avec l'équation (III.1.3) on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III.1.7})$$

En considérant que pour un élément infinitésimal dans la direction x, la masse ne changera que si le niveau de la surface en ce point varie (approximation liée à l'incompressibilité). La masse ne variera que si la vitesse sur x varie. On peut alors écrire :

$$h \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (\text{III.1.8})$$

Maintenant on cherche à éliminer u en différentiant (III.1.7) par rapport à x et (III.1.8) par rapport à t. Il vient :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{III.1.9})$$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{c = \sqrt{gh}} \quad (\text{III.1.10})$$

Il s'agit de l'équation caractéristique des tsunamis donnant l'évolution de la vitesse de propagation de l'onde de la vague en fonction de la profondeur. En plus des hypothèses énoncées en début de partie, il faut rajouter celle des eaux peu profondes (shallow water) qui consiste à négliger la variation verticale de la vitesse.

III.2. Equations en eaux profondes

Pour les vagues en eaux profondes, nous ne pouvons pas supposer la vitesse verticale comme négligeable. A partir de l'équation de continuité et en considérant le fait que le fluide est irrotationnel, on obtient l'équation de Laplace, liant le potentiel des vitesses ϕ (cf II.4.c).

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi \quad (\text{III.2.1})$$

On peut résoudre l'équation de Laplace qui prend en compte l'équation de continuité :

$$\Delta\phi = \vec{\nabla}^2\phi = 0 \quad (\text{III.2.2})$$

Il nous reste alors à écrire l'équation d'Euler en terme de potentiel. On négligera le carré de toutes composantes de vitesse car la théorie des vagues de faibles amplitudes est basée sur le fait que tous les mouvements sont infiniment petits. On obtient :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{P}{\rho} + gz \quad (\text{III.2.3})$$

Pour résoudre ces équations, nous allons faire l'hypothèse que la solution est de la forme :

$$\phi = f(z) \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III.2.4})$$

Où k et ω sont tels que la vitesse soit : $c = \frac{\omega}{k}$, avec ω la pulsation et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ proportionnel à

l'inverse de la longueur d'onde de la vague.

L'équation de Laplace devient :

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0 \quad (\text{III.2.5})$$

Ce qui se résout en :

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (\text{III.2.6})$$

Nous avons pour condition initiale, à $z=0$, $w = \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, ce qui donne $A=-B$, d'où :

$$f(z) = 2A \operatorname{ch}(kz) \quad (\text{III.2.7})$$

Puis en utilisant le fait qu'à la surface du fluide, $P=P_0$ (pression atmosphérique).

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.2.8})$$

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (\text{III.2.9})$$

Où η représente l'élévation verticale de l'eau.

Pour les vagues de faible amplitude, la vitesse verticale est égale au taux d'élévation de la surface de l'eau en tout point, ce qui donne la condition cinématique limite :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (\text{III.2.10})$$

La condition dynamique limite à la surface libre est donnée par la relation (III.2.9).

En combinant les deux équations sur les conditions aux limites, on obtient

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.2.11})$$

Dans cette formule nous avons remplacé toutes les valeurs devant être évaluées sur $z=h+\eta$ par des quantités évaluées à la surface d'équilibre $z=0$.

$$\frac{P}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + cste = 0 \quad (\text{III.2.12})$$

La solution générale pour le potentiel des vitesses est :

$$\phi = 2A \operatorname{ch}(kz) \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III.2.13})$$

Avec

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{III.2.14})$$

On injecte l'équation (III.2.13) dans (III.2.9) et on obtient :

$$\eta = -\frac{2\omega A}{g} \operatorname{ch}(kz) \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III.2.15})$$

On utilisant les relations : (III.2.10) (III.2.13) et (III.2.15) on trouve :

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kh) \quad (\text{III.2.16})$$

Avec les notations conventionnelles , g est l'accélération de la pesanteur et h est la profondeur de l'eau.

Nous avons choisis plus haut ω et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ tels que $c = \frac{\omega}{k}$. Nous obtenons alors :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th}(kh)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (\text{III.2.17})$$

Ou encore :

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \quad (\text{III.2.18})$$

Cette équation traduit l'évolution de la vitesse de l'onde de la vague en fonction de la profondeur, quand la profondeur h du fond océanique est très importante.

Remarque :

On retrouve l'équation caractéristique des tsunamis en eaux peu profondes quand h tend vers 0. En effet, un équivalent de $\operatorname{th}(x)$ en 0 est x , d'où : $c = \sqrt{gh}$

III.3. Equations de Saint Venant

Dans cette section nous allons établir les **équations de Saint Venant qui permettent de décrire la propagation d'un tsunami dans une mer peu profonde**, comme la Méditerranée où on néglige la force de Coriolis car les distances de propagation sont petites. Il s'agit du modèle le plus utilisé par les scientifiques français.

L'hypothèse des eaux peu profondes nous permet d'écrire que $w=0$, on néglige la composante verticale de la vitesse.

La déformation de la surface est $\eta(x, y, t)$ et la profondeur est $h(x, y, t)$ (grandeur positive)
 Il est pratique d'introduire les composantes moyennes des vitesses horizontale et latérale.

$$\tilde{u} = \frac{1}{D} \int_{-h}^{\eta} u dz \quad \tilde{v} = \frac{1}{D} \int_{-h}^{\eta} v dz \quad (\text{III.3.1})$$

On intègre sur toute la profondeur $D = \eta + h$

L'équation de l'hydrostatique $dP = -\rho g dz$ qui découle de l'équation d'Euler (II.4.5) nous donne :

$$P = P_0 + \rho g(\eta - z) \quad (\text{III.3.2})$$

Cela nous donne en considérant la pression atmosphérique P_0 comme constante:

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \begin{pmatrix} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.3})$$

A l'aide de l'opérateur dérivée totale défini au II et compte tenu de $w=0$ nous avons :

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = w = 0 \quad (\text{III.3.4})$$

Nous pouvons vérifier que cette équation est rigoureusement la même que celle-ci :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial D\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial D\tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.3.5})$$

Pour obtenir les composantes horizontales de l'équation d'Euler, il faut tenir compte de certaines forces de contraintes présentes aux limites du fluide, c'est à dire à la surface et au fond de l'océan.

On donne :

$$\vec{f} = \frac{1}{\rho} (\vec{\tau}^s + \vec{\tau}^f) \quad (\text{III.3.6})$$

où $\vec{\tau}^s$ et $\vec{\tau}^f$ sont respectivement les forces de contraintes à la surface et au fond de l'océan.

Les composantes horizontales moyennes de la vitesse données par l'équation (II.4.5) et en tenant compte des équations (III.3.3) (III.3.6), valent :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_x^s}{\rho} + \frac{\tau_x^f}{\rho} \quad (\text{III.3.7})$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y^s}{\rho} + \frac{\tau_y^f}{\rho} \quad (\text{III.3.8})$$

Dans l'hypothèse où les forces exercées par le vent sur la surface de l'eau sont négligeables nous pouvons écrire : $\tau^s = 0$.

Pour ce qui est des forces exercées par le fond de l'océan nous avons :

$$\tau_x^f = \frac{1}{2} \rho C \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2} \tilde{u} \quad \text{et} \quad \tau_y^f = \frac{1}{2} \rho C \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2} \tilde{v} \quad (\text{III.3.9})$$

où C est un coefficient sans dimension dépendant de la dureté du fond océanique et de la structure de celui-ci.

Nous introduisons également le coefficient de Manning m lié au coefficient C par la formule :

$$C = \frac{2gm^2}{D^{1/3}} \quad (\text{III.3.10})$$

Nous allons ensuite effectuer un changement de variable utilisant la répartition de flux M et N des vitesses horizontales :

$$M = D\tilde{u} \quad \text{et} \quad N = D\tilde{v} \quad (\text{III.3.11})$$

L'équation (III.3.5) puis les équations de conservation du moment (III.3.7) (III.3.8) deviennent :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.3.12})$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gm^2}{D^{7/3}} M \sqrt{M^2 + N^2} = 0 \quad (\text{III.3.13})$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{gm^2}{D^{7/3}} N \sqrt{M^2 + N^2} = 0 \quad (\text{III.3.14})$$

Ce système des trois équations (III.3.12) (III.3.13) (III.3.14) constitue ce que l'on appelle les équations de Saint Venant, ou encore en anglais « the nonlinear shallow water equations ».

IV. Relation entre magnitude et hauteur initiale :

IV.1. Approche énergétique

Ici nous allons employer des modèles physiques très simples de la déformation du sol océanique pour obtenir les principales propriétés des tsunamis générés par des tremblements de terre ou des glissements de terrain. Ceci aura pour but de comprendre les paramètres fondamentaux qui contrôlent l'énergie dissipée par la vague d'un tsunami.

L'origine du tsunami sera ici tectonique, provoquée par la dislocation d'un bloc de roche du à de forte forces de compression au niveau de la croûte océanique. On considèrera le modèle simple ci-dessus. Une surface S du fond océanique se soulève brusquement d'une hauteur δh . On suppose ici le soulèvement instantané. (en effet nous avons vu que la vitesse de déplacement de ce bloc est bien supérieure à celle de l'établissement de la vague dans le fluide qui va permettre d'éliminer cette déformation)

Alors, l'augmentation de l'énergie potentielle de l'océan est régie par le déplacement du volume $\delta h \cdot S$ d'eau déplacée au fond de l'océan.

$$W_1 = \rho_{eau} g S \delta h H \quad (IV.1.1)$$

où ρ_{eau} est la densité de l'eau , H la profondeur de l'océan, g l'accélération de la gravité.

L'expression (IV.1.1) représente le travail du au déplacement d'un volume d'eau situé à une profondeur H.

Vu que l'océan est un fluide non visqueux, cette énergie disponible va être transférée intégralement à la surface. Ainsi le centre de gravité de l'eau déplacée, initialement à la hauteur $\delta h/2$ au dessus du fond océanique est transféré à la hauteur H.

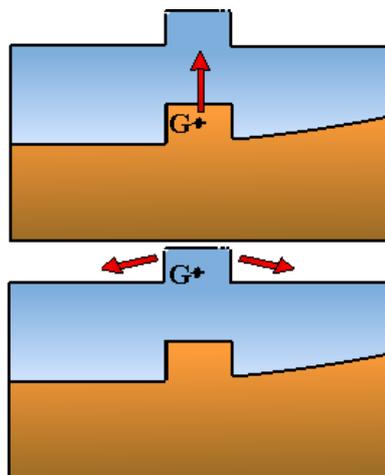


fig II.3.2 : Le soulèvement entraîne un déplacement du fluide de même volume à la surface

Ainsi, l'énergie potentiel due à ce changement de centre de gravité est :

$$W_2 = \frac{1}{2} \rho_{eau} g S \delta h \left(H - \frac{\delta h}{2} \right) \quad (IV.1.2)$$

La différence entre ces deux travaux représente donc l'énergie disponible pour générer la vague du tsunami :

$$E = W_1 - W_2 = \frac{1}{2} \rho_{eau} g S (\delta h)^2 \quad (IV.1.3)$$

Quand la déformation du plancher océanique a lieu rapidement, la déformation n'est pas réversible, on est en déséquilibre hydraulique. Il y a création d'un travail plus important que l'augmentation de l'énergie potentielle due au changement de centre de gravité. Ainsi, la variation d'énergie permet la création d'une vague de tsunami.

Si au contraire le déplacement se fait lentement, il y aura à tout instant équilibre entre les forces de pressions de la roche et celle de la colonne d'eau située au dessus. Le processus sera d'un point de vu thermodynamique réversible, et il n'y aura pas d'énergie disponible pour créer un tsunami.

Dans la pratique la vitesse de rupture de la roche lors de séisme est de l'ordre de 3km.s^{-1} alors que la vitesse des tsunamis est inférieure à 250 m.s^{-1} .

IV.2. Relation entre la hauteur initiale et la magnitude

L'équation (IV.1.3) se réécrit, par considération dimensionnelle : $E_T = k \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot \varepsilon^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_0}{\mu} \right)^{\frac{4}{3}}$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u : \text{Déplacement de la plaque} \\ M_0 : \text{Moment des forces de contraintes} \\ \varepsilon = \Delta/L : \text{déformation relative de la plaque} \\ L : \text{Longueur de la faille} \\ \mu : \text{rigidité de la plaque} \end{array} \right.$$

L'énergie d'une onde soliton est $E_S = \rho_{eau} \cdot g \cdot \frac{(A_0 \cdot H)^{3/2}}{\sqrt{3}} \cdot l$

L'égalité entre E_T et E_S donne : $A_0 = \left(\frac{k}{l} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{H} \cdot \varepsilon^{\frac{4}{9}} \cdot \left(\frac{M_0}{\mu} \right)^{\frac{8}{9}}$

Puis, la magnitude du séisme est reliée au moment du séisme par la relation : $M_w = \frac{2}{3} \log(M_0) - 6.0$

D'où la relation entre la hauteur de la bosse initiale et la magnitude du séisme :

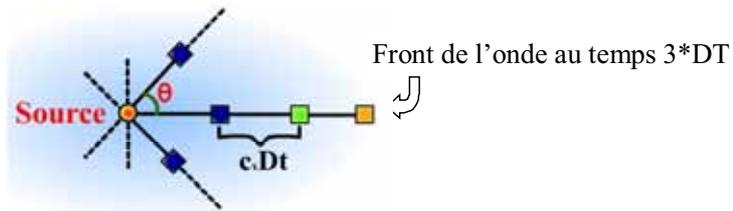
$$A_0 = \left(\frac{k}{l} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{H} \cdot \varepsilon^{\frac{4}{9}} \cdot \left(\frac{10^{\frac{3}{2}(M_w + 6.0)}}{\mu} \right)^{\frac{8}{9}}$$

V. Modélisation de la propagation :

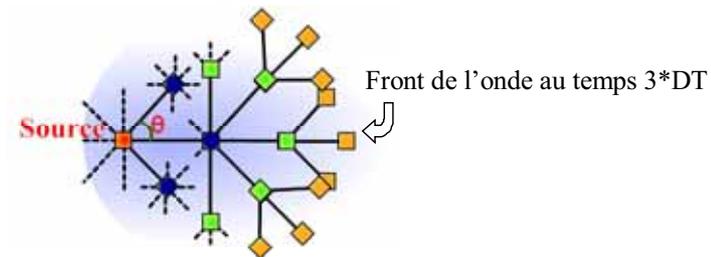
V.1. Schémas de principe :

Connaissant la vitesse de l'onde et la bathymétrie du fond océanique, $c = \sqrt{gh}$, on peut calculer les différentes coordonnées du front d'onde à un instant donné.

Méthode 1 : Cas de la propagation rectiligne :



Méthode 2 : Application du principe d'Huygens :



V.2. Algorithme Maple

Initialisation

```
> restart:
with(plots):
with(plottools):
```

Données relatives à l'aspect graphique

```
> E:=700000: #echelle 700km est représenté par 1
Xmin:=-18: #fenetre que l'on affiche (ici l'ocean indien)
Xmax:=8.5:
Ymin:=-8:
Ymax:=6:
```

L'échelle a été choisie de telle sorte que les deux principaux épicentres du séismes de Sumatra soient respectivement aux coordonnées (0,0) et (-1,1)

Données relatives aux sources de tsunamis

```
> x0:=0:
y0:=0:
x1:=-1:
y1:=1:
> g:=9.81:
>
> c:=(x,y)->(g*abs(h(x,y)))^(1/2);
```

$$c := (x, y) \rightarrow \sqrt{g |h(x, y)|}$$

(1.1)

Fonctions auxiliares

```
> donne_droite:= (e,f,c,d) ->[(f-d)/(e-c),d-(f-d)/(e-c)*c]:
> affiche:=proc(arg,xmin,xmax,ymin,ymax)
PLOT(
POLYGONS([[ -8,-4],[ -7.4,-2],[ -6.4,-2],[ -7,-4]],COLOR(RGB,0.43,0.22,0),STYLE
(PATCHNOGRID)), #Madagascar
##POLYGONS([[ -6,0],[ -4.5,-1.5],[ -4.5,-1],[ -6,0.5]],COLOR(RGB,0.43,0.22,0)),
##POLYGONS([[ -4.5,-1],[ -5,-3],[ -5.3,-3],[ -4.8,-1]],COLOR(RGB,0.43,0.22,0)),
POLYGONS([[4,4],[ -10,4],[ -10,6],[4,6]],COLOR(RGB,0.43,0.22,0),STYLE
(PATCHNOGRID)),
POLYGONS([[ -1,4],[ -2.5,1.5],[ -4,4]],COLOR(RGB,0.43,0.22,0),STYLE
(PATCHNOGRID)), ##Inde
POLYGONS([[3,-5],[3,-3],[6.5,-2],[8,-4],[7,-5]],COLOR(RGB,0.43,0.22,0),
STYLE(PATCHNOGRID)),
POLYGONS([[2,1],[0,4],[0,5],[3,5]],COLOR(RGB,0.43,0.22,0),STYLE
(PATCHNOGRID)),
POLYGONS([[0,1],[2,-1],[3,-1],[1,1]],COLOR(RGB,0.43,0.22,0),STYLE
(PATCHNOGRID)), ##Sumatra
POLYGONS([[ -7,4],[ -9.5,-5],[ -12,-5],[ -13,0],[ -17,0],[ -17,5],[ -7,5]],STYLE
(PATCHNOGRID), COLOR(RGB,0.43,0.22,0)),
```

```

op(arg) ,
POLYGONS([[-18,-15],[10,-15]], COLOR(RED,0.58,0.59,1)), ##
fond
AXESSTYLE(FRAME),VIEW(xmin..xmax,ymin..ymax),SCALING(CONSTRAINED);
end:

```

```

> donne_droite(-5.3,-3,-4.8,-1);
[4.000000000, 18.20000000]

```

(1)

▼ Modélisation du fond

océanique et des côtes

```

>
> Indonesie:= (x,y) -> 0<=x and y >= -x+1 and y<= -x+2 and y<=1 and y>=
-1:
Chine:=(x,y)-> x>=0 and y>=-1.5*x+4 and y>=4*x-7 and y>=0:
Asie := (x,y)-> y>=4 and x<=4:
Afrique := (x,y) -> y>= 3*x+24 and y>=-5 and (y>=-5*x-65 or y>=0) and
x>=-17 :
Madagascar := (x,y) -> y<=3.34*x+22.67 and y>=3.34*x+19.34 and y>=-4 and
y<=-2 :
Inde := (x,y) -> y>=-1.67*x-2.67 and y>=1.67*x+4.67 :
Australie:=(x,y) -> x>=3 and y<=1/4*x-23/4+2 and y<=-x+3+2 and y>=3*x
-33+2 and (y>=-5) and y>=-14*x-17/4:
CoteAfrique := (x,y) -> y>= 3*x+21 and y>=-5 and x>=-10:
CoteInde1 := (x,y) -> y>=-0.1*x+1.5 and x<=4:
CoteIndonesie1 := (x,y) ->x>=0 and y >=-x and y<=-x+1 and y<=1 and y>=-1:
CoteIndonesie2 := (x,y) ->x>=1 and y >=-x+2 and y<=4*x-7:
Dessus_madag1 := (x,y) -> y>=-x-6 and y<=-x-5.5 and x>=-6 and x<=-4.5:
Dessus_madag2 := (x,y) -> y>=4*x+17 and y<=4*x+18.2 and y>=-3 and y<=-1:
Dorsale1Bas:=(x,y) -> y<=5*x+6 and y>= 5*x+3.5:
Dorsale1Haut:=(x,y) -> y>=5*x+6 and y<= 5*x+8.5:
Dorsale2Bas:=(x,y) -> y<=5*(x+2)+6 and y>= 5*(x+2)+3.5 and y>=-1.5:
Dorsale2Haut:=(x,y) -> y>=5*(x+2)+6 and y<= 5*(x+2)+8.5 and y>=-1.5:
> h:=(x,y)->1000/E*piecewise( Inde(x,y) or Asie(x,y) or Afrique(x,y) or
Madagascar(x,y) or Indonesie(x,y) or Chine(x,y) or Australie(x,y) , 0 ,
CoteIndonesie2(x,y) , -1.5,
CoteInde1(x,y) , 1.5*y-6,
CoteAfrique(x,y) , -4*x+4/3*y-32,
CoteIndonesie1(x,y) , 4*x+4*y-4,
Dessus_madag1(x,y) , -1,
Dessus_madag2(x,y) , -1,
Dorsale1Bas(x,y) , -2*x+0.4*y-5.4+1 ,
Dorsale1Haut(x,y) , 2*x-0.4*y-0.6+1 ,
Dorsale2Bas(x,y) , -2*(x+2)+0.4*y-5.4+2.5 ,
Dorsale2Haut(x,y) , 2*(x+2)-0.4*y-0.6+2.5 ,

```

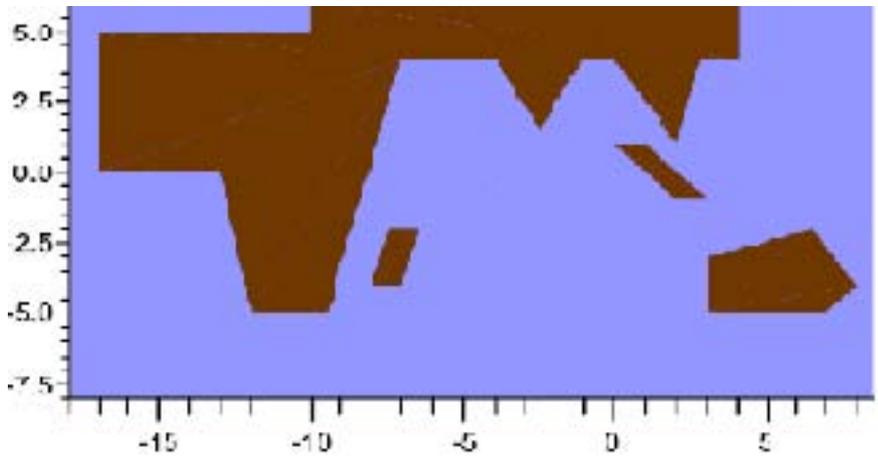
```

-5):
> ## ici h est pris négatif
> est_en_mer:=proc(x1,y1)
    not( evalf(Inde(x1,y1) or Indonesie(x1,y1) or Afrique(x1,y1) or
Madagascar(x1,y1) or Asie(x1,y1) or Australie(x1,y1) or Chine(x1,y1))) and
y1<=Ymax and y1>=Ymin and x1>=Xmin and x1<=Xmax :
end:
>
>

```

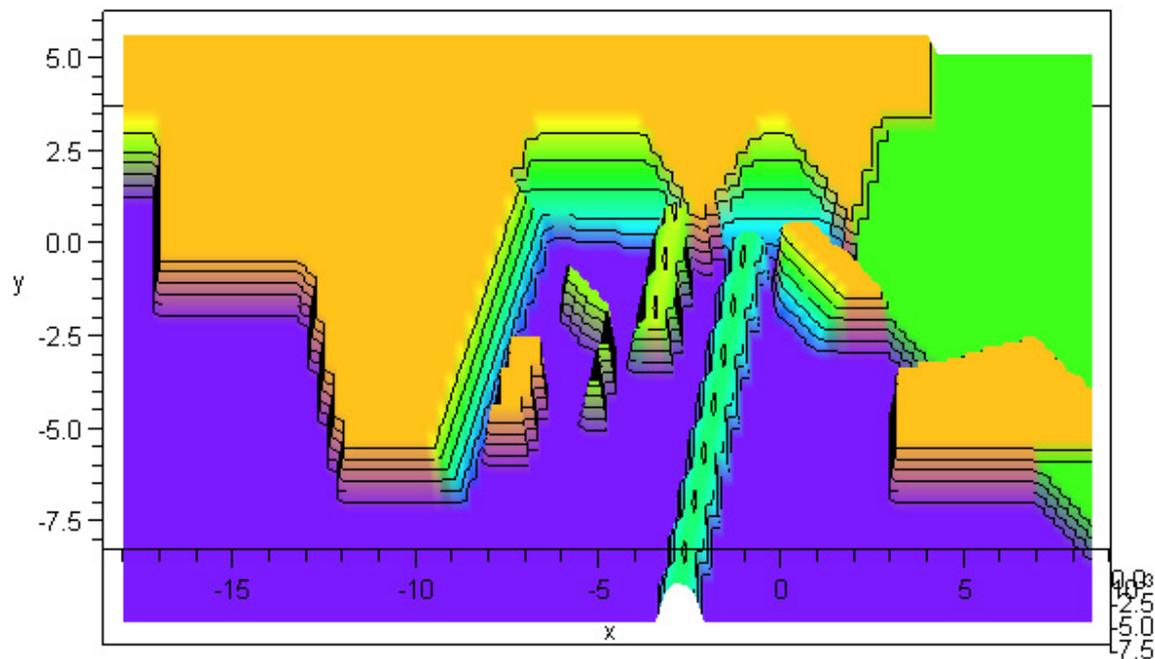
Affichage des continents

```
> affiche([],Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);
```



Affichage du fond océanique

```
> plot3d({h(x,y)}, x=Xmin..Xmax,y=Ymin..Ymax,view=-6000/E..1000/E, axes=boxed,
numpoints=10000,shading=Z, style=PATCHNOGRID,scaling=UNCONSTRAINED);
```



▼ Modèle 1 (propagation rectiligne) - Calculs de coordonnées

Ce modèle considère une source ponctuelle de tsunami (coordonnées x_0, y_0), qui génère des ondes dans un nombre fixé de directions (données par $2*k*Pi/angle$) et qui se propagent rectilignement. Leur vitesse et leur position sont calculées tout les DT secondes. L'onde s'arrête si elle rencontre la terre, ou au bout d'un temps $prof_max*DT$ défini par l'utilisateur.

L'indice j permet de définir une couleur d'affichage

Bcercles est un boolean , qui active ou non l'affichage de cercles (pour comparer avec la propagation rectiligne uniforme)

La version beta effectue les calculs de coordonnées (servira pour affiche_tout plus loin), et modele_m1 est adapté pour la fonction d'affichage affiche_m1 (pour modele 1).

```
>
> modele_m1_beta := proc(x0,y0,DT,angle,prof_max)
  local k,j,n,L,TabPoints,x1,y1,d;
  L:=[];
  n:=trunc(2*Pi/angle);
  for k from 0 to n-1 do
```

```

x1:=x0;
y1:=y0;
TabPoints:=[];
  for j from 1 to prof_max do
    if est_en_mer(x1,y1) then
      d:=DT*c(x1,y1)/sqrt(700000);
      x1:=evalf(d*cos(k*angle)+x1,6);
      y1:=evalf(d*sin(k*angle)+y1,6);
    fi;
  TabPoints:=[op(TabPoints),[x1,y1]];
  od;
  L:=[op(L),TabPoints];
  od;
  L;
end:
> modele_1 := proc(x0,y0,DT,angle,prof_max,couleur1,j,Bcercles)
  local k,maxk,max,n,arret,L,TabPoints,x1,y1,d,profondeur,Centre,Points,
  Cercles;
  L:=[];
  n:=trunc(2*Pi/angle);
  for k from 0 to n-1 do
    x1:=x0;
    y1:=y0;
    TabPoints:=[];
    profondeur:=0;
    arret:=false;
    while (profondeur<prof_max and not(arret)) do
      profondeur:=profondeur+1;
      d:=DT*c(x1,y1)/sqrt(700000);
      x1:=evalf(d*cos(k*angle)+x1,6);
      y1:=evalf(d*sin(k*angle)+y1,6);
      if est_en_mer(x1,y1) then TabPoints:=[op(TabPoints),[x1,y1]];
      else arret:=true; fi;
    od;
    L:=[op(L),TabPoints];
    od;
    ##print(L);
    #####elements a tracer
    Centre:=[POINTS([x0,y0],SYMBOL(CROSS),COLOR(1,0,0))];
    Points:=[];
    Cercles:=[];
    max:=1;
    maxk:=1;

    for k from 1 to nops(L) do
      if(nops(L[k])>max) then max:=nops(L[k]); maxk:=k; fi;

```

```

if(nops(L[k])>0) then
  Points := [op(Points), POINTS( op(L[k]) ,SYMBOL(DIAMOND),COLOR(HUE,j/n)) ]
;
fi;
od;

if(Bcercles) then
for k from 1 to max do
  Cercles := [op(Cercles), circle( [x0,y0],sqrt( (L[maxk][k][1]-x0)**2 +(L
[maxk][k][2]-y0)**2) ,color=couleur1 ) ];
od;
[op(Centre),op(Points),op(Cercles)];
else

[op(Centre),op(Points)];
fi;
end:

```

>

>

>

▼ Modèle 1 - Procédures d'affichages de points

La procédure suivante utilise les fonctions définies plus haut (notamment la fonction auxiliaire affiche) pour afficher le résultat obtenu pour un nombre n de sources situées entre deux epicentres de coordonnées (x0 y0) et (x1 y1).

```

> affiche_discret_m1:=proc(x0,y0,x1,y1,n,DT,angle,prof,Bcercles,xmin,xmax,
ymin,ymax)
local Lt,j;
Lt:=POLYGONS([[x0,y0],[x1,y1]]);
for j from 0 to n do
  Lt:=Lt,op(modele_1(x0+(j/n)*(x1-x0),y0+(j/n)*(y1-y0),DT,angle,prof,
dark,j,Bcercles,xmin,xmax,ymin,ymax)); od;
affiche([Lt],xmin,xmax,ymin,ymax);
end:

```

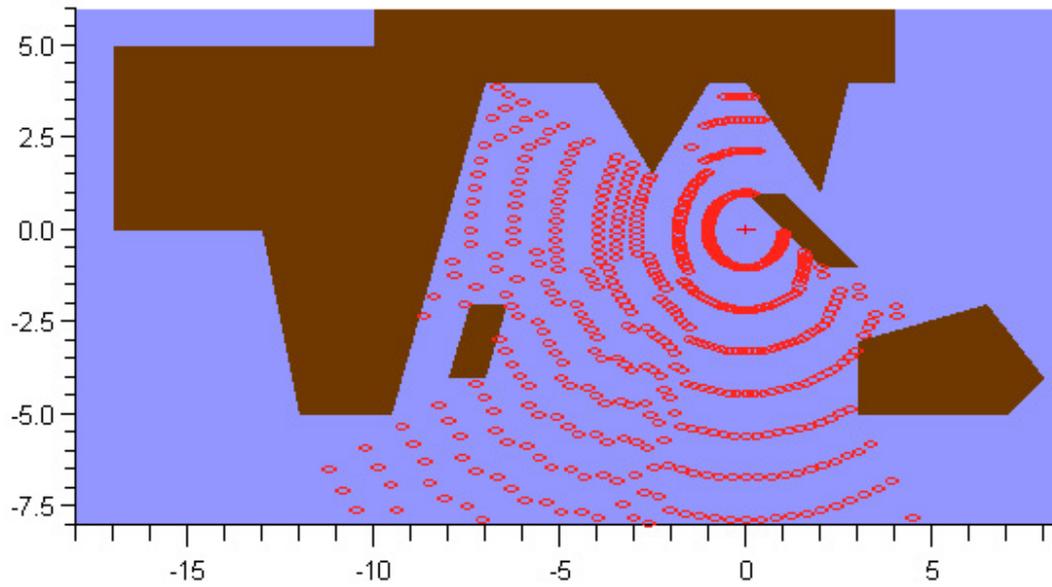
>

De la principale source du tsunami de Sumatra (coordonnées (0,0)), on regarde l'évolution des ondes partant dans 120 directions pendant 3600*12 secondes (12 heures)

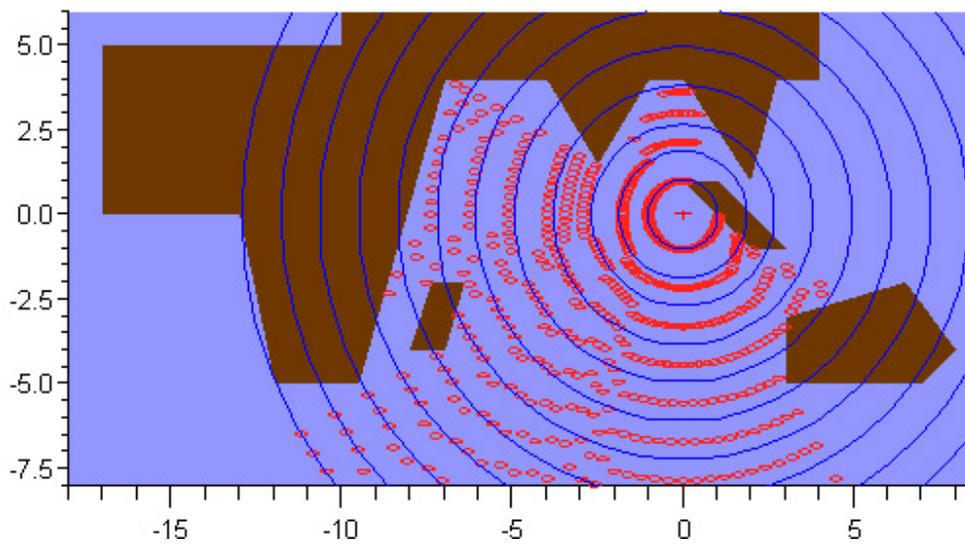
```

> affiche( modele_1(x0,y0,3600,Pi/60,12,blue,1,false),Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);

```



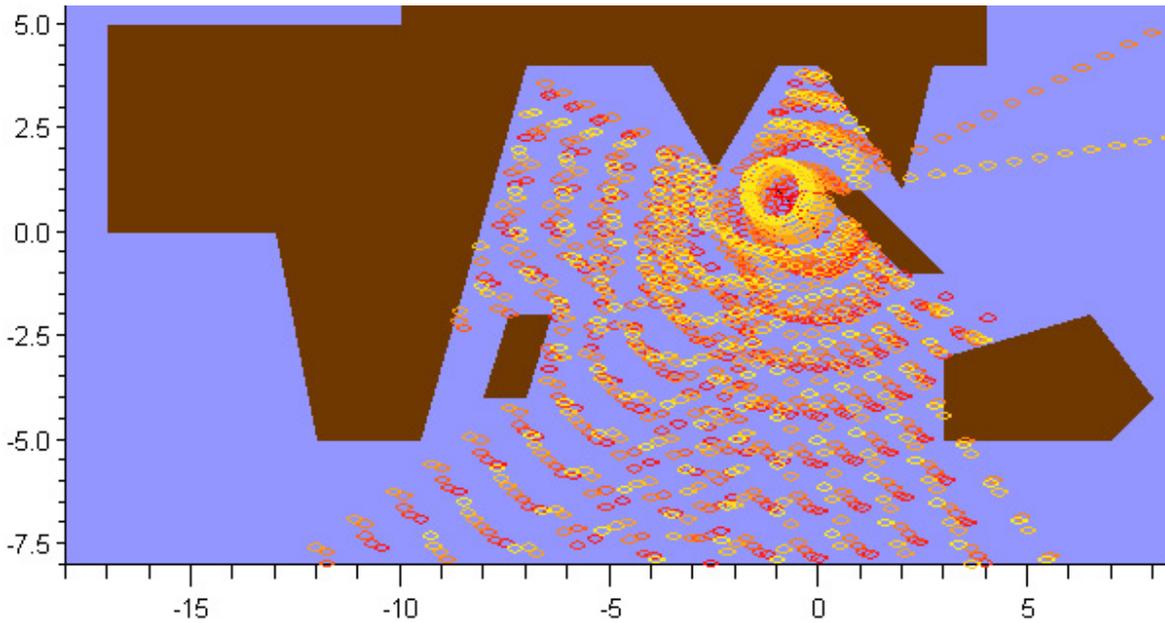
> affiche(modele_1(x0,y0,3600,Pi/60,12,blue,1,true),Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);



>

On dispose 6 sources entres les deux sources principales (0,0) (-1,1), les autres paramètres sont inchangés (pas temporelle et angulaire)

> affiche_discret_m1(x0,y0,x1,y1,6,3600,Pi/20,15,false,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);



```
> affiche_discret_m1(x0,y0,x1,y1,10,1800,Pi/6,20,false,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);
```

```
>
```

▼ Modèle 1 - Procédures d'affichages de Polygones de mêmes instants

Compte tenu des résultats obtenus ci-dessus (certaines directions de propagation sont privilégiées), on peut résoudre le problème de discrétisation des directions en reliant les points qui représentent l'onde dans l'espace au même instant.

Cette fonction est complexe car il faut pour chaque source relier les points qui correspondent au même instant.

Or les fonctions précédentes calculent ces points sources par sources. On a utilisé ici, une méthode géométrique basée sur les angles formés dans l'intersection de deux cercles pour retrouver les points correspondant aux mêmes instants. Toutefois cette méthode est complexe et nous ferons plus simple dans la suite.

```
> polygones_meme_instant_complex_m1 := proc (x0,y0,x1,y1,n,DT,angle,prof)
  local j,k,l,p,Poly,Pas,Rmoyen,L_disque,theta,theta_min,theta_max,i_min,
  i_max;

  p := 2*trunc(evalf(Pi/angle));
  Pas := sqrt((x0-x1)**2+(y0-y1)**2)/n;
  theta := arctan((y0-y1)/(x0-x1));
  Poly := NULL;

  L_disque := [seq(modele_m1_beta(x0+((j-1)/n)*(x1-x0),y0+((j-1)/n)*(y1-y0),
  DT,angle,prof,blue,COLOR(RGB,(j-1)/n,0,1-(j-1)/n)),j=1..n)];

  for l from 1 to prof do ## on est a une certaine profondeur

  Rmoyen := NULL;
  theta_min := array(1..n);
  theta_max := array(1..n);
```

```

i_min := array(1 .. n);
i_max := array(1 .. n);

## pour chaque disque on calcul le rayon moyen Rmoyen[j]
Rmoyen := [ seq(sum( sqrt( (L_disque[j][k][1][1]-(x0+((j-1)/n)*(x1-x0))) *
* 2+(L_disque[j][k][1][2]-(y0+((j-1)/n)*(y1-y0))) ** 2 ), k=1 .. p)/p, j=1
.. n] ;

## pour chaque disque on calcule les deux angles minimaux
for j from 1 to n-1 do
theta_max[j] := evalf(Pi-evalf(arccos((Pas-Rmoyen[j+1])/Rmoyen[j]))+theta)
;
theta_min[j+1] := evalf(evalf(arccos((Pas-Rmoyen[j])/Rmoyen[j+1]))+theta);
od ;
theta_min[1] := 0+theta;
theta_max[n] := Pi+theta;

## a chaque angles son indice
for j from 1 to n do
i_max[j] := trunc(evalf(theta_min[j]/angle)) mod p;
i_min[j] := trunc(evalf(theta_max[j]/angle)+1) mod p;
od ;

## on est apte a faire les polygones
Poly := Poly, POLYGONS( [ seq(seq(L_disque[j][k][1],k=i_min[j] .. i_max[j]
),j=1 .. n) ] );

od ;
[Poly];
end :
> polygones_meme_instant_m1:=proc(x0,y0,DT,angle,prof,Bcercles,xmin,xmax,
ymin,ymax)
local L_disque,k,j,Poly ,Centre,Cercles,max,maxk,p ;

p := 2*trunc(evalf(Pi/angle));
Poly:=NULL;
L_disque := modele_m1_beta(x0,y0,DT,angle,prof);

for k from 1 to prof do
Poly:=Poly,POLYGONS( [seq(L_disque[j][k],j=1..p )],COLOR(HUE,k/prof) ,
THICKNESS(0),LINESTYLE(0));
od;
Centre:=[POINTS([x0,y0],SYMBOL(CROSS),COLOR(RGB,1,0,0))];
Cercles:=[];
max:=1;
maxk:=1;

```

```

for k from 1 to nops(L_disque) do
  if(nops(L[k])>max) then max:=nops(L[k]); maxk:=k; fi;
od;

if(Bcercles) then
for k from 1 to max do
  Cercles := [op(Cercles), circle( [x0,y0],sqrt( (L[maxk][k][1]-x0)**2 +(L
[maxk][k][2]-y0)**2) ,Color=blue ) ];
od;
[op(Centre),Poly];
else
[op(Centre),Poly,op(Cercles)];fi;

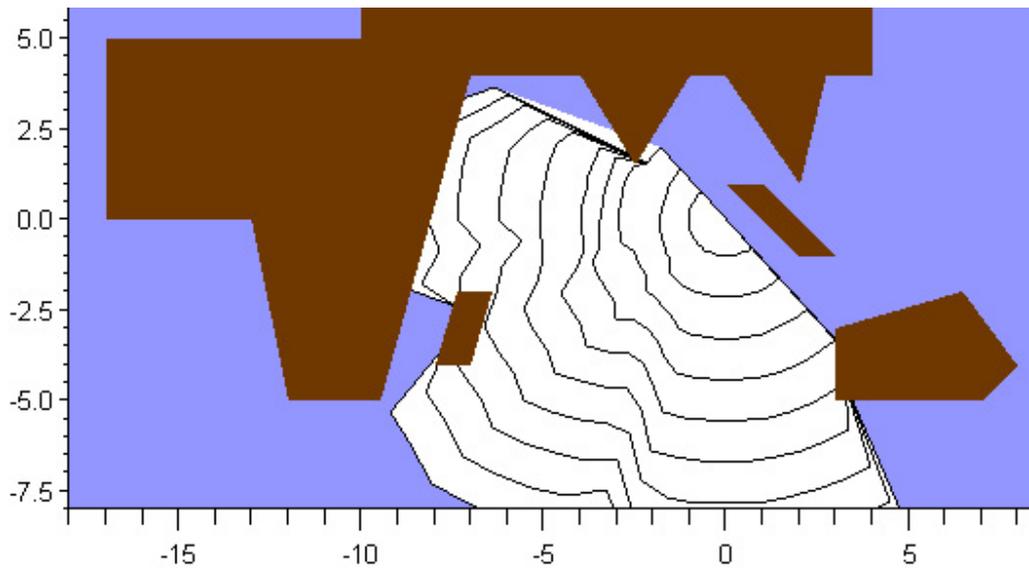
end:
>
> affiche_polygones_meme_instant_discret_m1:=proc(x0,y0,x1,y1,n,DT,angle,
prof,Styl)
local Lt,l,L_disque,k,j,Poly ,Centres,Cercles,max,maxk,p;
Poly:=POLYGONS([ [x0,y0], [x1,y1]]);
Lt:=[];
p := 2*trunc(evalf(Pi/angle));
Poly:=NULL;

for j from 0 to n do
  Lt:=[op(Lt), (modele_m1_beta(x0+(j/n)*(x1-x0),y0+(j/n)*(y1-y0),DT,angle,
prof))];
od;
Poly:=Poly, seq(seq( POLYGONS([seq(Lt[k][j][1],j=1..p)],COLOR(HUE,l/(prof))
,STYLE(Styl),THICKNESS(0),LINESTYLE(0)) ,k=1..n+1),l=1..prof) ;

Centres:=[POINTS([x0,y0],SYMBOL(CROSS),COLOR(RGB,1,0,0))];
[op(Centres),Poly];

affiche([Poly],Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);
end:
>
>
> affiche(polygones_meme_instant_complex_m1(x0,y0,x1,y1,1,3600,Pi/30,10),Xmin,
Xmax,Ymin,Ymax);

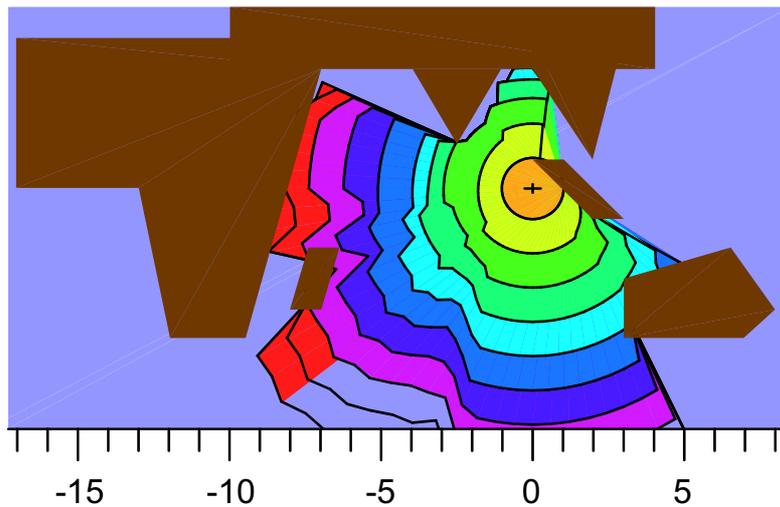
```



>

Structure : polygones_meme_instant(x0,y0,Pas_temporel,Pas_angulaire,Profondeur,Trace_de_cercles.)

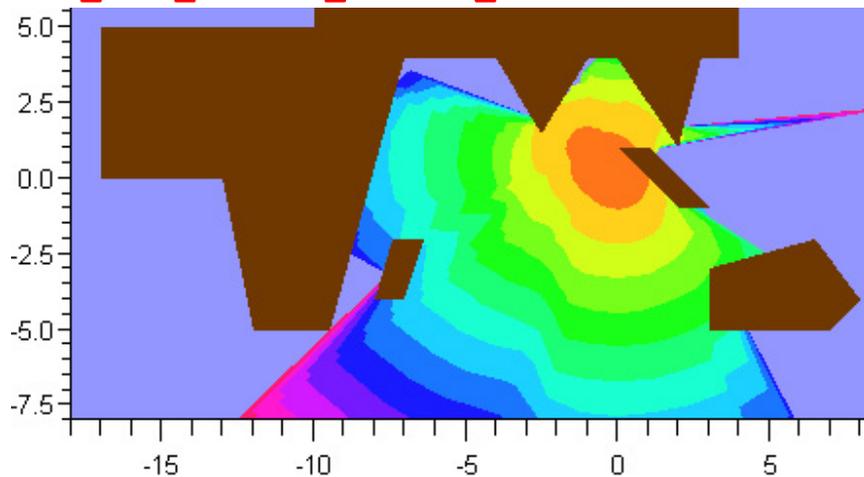
> affiche(polygones_meme_instant_m1(x0,y0,3600,Pi/40,10,false),Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);



> Style:=PATCHNOGRID:

Style peut accueillir les valeur : PATCHNOGRID,LINE,PATCH....

> affiche_polygones_meme_instant_discret_m1(x0,y0,x1,y1,5,3600,Pi/20,15,Style);



|>

▼ Modèle 2 - Principe d'Huygens

Devant le fait que les résultats que l'on obtient ne permettent pas d'expliquer le fait que l'onde "fait le tour des îles", il nous faut appliquer un modèle dans lequel en un point traversé par l'onde et à un instant donné, ce point se comporte lui-même comme une source. Un tel modèle fait évidemment appel à la récursion. Toutefois, celle-ci est coûteuse en mémoire pour Maple, et génère des points qui dans la réalité n'existeraient pas (l'onde repart en arrière). On effectuera donc en second lieu, un algorithme itératif, avec des filtres permettant de supprimer de tels points.

Pour éviter trop de calcul on introduit une "restriction". Même si le point se comporte comme une source ponctuelle, il ne va se propager dans toutes les directions (l'onde ne va pas revenir en arrière), on suppose donc que le point émet un faisceau allant de $-n \cdot \text{angle}$ à $+n \cdot \text{angle}$ autour de la direction dans laquelle il a été atteint. (n vaut $\text{Pi}/(\text{restr} \cdot \text{angle})$). Si n vaut 1 on est dans le cas de propagation rectiligne.)

>

```
> modele_2_rec:=proc(x0,y0,DT,angle,prof,rest,xmin,xmax,ymin,ymax)
  local parcours_rec,n ;
  n:=trunc(Pi/(restr*angle));

  parcours_rec:=proc(x,y,imin,imax,prof_en_cours)
    local k,d,x1,y1,L;

    L:=POINTS([x,y],COLOR(HUE,(prof_en_cours/prof)));
    d:=DT*c(x,y)/sqrt(E);

    for k from imin to imax do
      x1:=evalf(d*cos(k*angle)+x);
      y1:=evalf(d*sin(k*angle)+y);
      if( est_en_mer(x1,y1) and prof_en_cours<prof ) then
        L:=L,parcours_rec(x1,y1,k-n,k+n,prof_en_cours+1);
      fi;
    od;
  L;
end:

affiche([parcours_rec(x0,y0,0,2*restr*n,0)],xmin,xmax,ymin,ymax);

end:
> modele_2_it:=proc(x0,y0,DT,angle,prof,rest,epsilon)
  local n,d,ori,k,i,l,j,L_aux,L_aux2,L_finale,x1,y1,x2,y2,x3,y3,deb;

  n:=trunc(Pi/(restr*angle));
  x1:=x0;y1:=y0;
  L_finale:=POINTS([x0,y0],COLOR(RGB,0,0,0),SYMBOL(CROSS));
  L_aux:=NULL;

  d:=DT*c(x1,y1)/sqrt(700000);
```

```

x2:=evalf(d+x1);
y2:=evalf(y1);

if est_en_mer(x2,y2) then
  L_aux:=L_aux,[x2,y2,0];
  L_finale:=L_finale,POINTS([x2,y2],COLOR(HUE,0));
else x2:=x1;y2:=y1;
fi;

for k from 1 to 2*restr*n-1 do
  x3:=evalf(d*cos(k*angle)+x1);
  y3:=evalf(d*sin(k*angle)+y1);
  if est_en_mer(x3,y3) then
    if(sqrt((x3-x2)**2+(y3-y2)**2)>epsilon) then
      L_aux:=L_aux,[x3,y3,k];
      L_finale:=L_finale,POINTS([x3,y3],COLOR(HUE,0));
      x2:=x3;y2:=y3;
    fi; fi;
od;

L_aux:=[L_aux];

for j from 1 to prof-1 do
L_aux2:=NULL;

##Laux represente la liste des points du niveau j,[x1,y1,k], ou k est
l'origine (la direction dont il viennent
##

  for i from 1 to nops(L_aux) do
    x1:=L_aux[i][1];
    y1:=L_aux[i][2];
    ori:=L_aux[i][3];

    d:=DT*c(x1,y1)/sqrt(700000);
#####si i =1
    if(i=1) then
      x2:=evalf(d*cos((ori-n+2)*angle)+x1);
      y2:=evalf(d*sin((ori-n+2)*angle)+y1);
      L_aux2:=L_aux2,[x2,y2,k];
      L_finale:=L_finale,POINTS([x2,y2],COLOR(HUE,j/prof));
      if est_en_mer(x2,y2) then
        L_aux2:=L_aux2,[x2,y2,k];
        L_finale:=L_finale,POINTS([x2,y2],COLOR(HUE,j/prof));
      else x2:=x1;y2:=y1;
    fi;

```

```

deb:=ori-n+3;
else deb:=ori-n+2;
fi;##### fin si ori=1
for k from (deb) to ori+n-2 do
    x3:=evalf(d*cos(k*angle)+x1);
    y3:=evalf(d*sin(k*angle)+y1);

    if est_en_mer(x3,y3) then

        if(sqrt((x3-x2)**2+(y3-y2)**2)>epsilon) then
            L_aux2:=L_aux2,[x3,y3,k];
            L_finale:=L_finale,POINTS([x3,y3],COLOR(HUE,(j)/prof));
            x2:=x3;y2:=y3;
        fi;
    fi; od;

    od;
    L_aux:=[L_aux2];

od;
[L_finale];

end:
>
> modele_2_it_polygones:=proc(x0,y0,DT,angle,prof,restr,epsilon,xmin,xmax,
ymin,ymax)
local n,d,ori,k,i,l,j,L_aux,L_aux2,L_finale,L_coords,L_points,x1,y1,x2,y2,
x3,y3,deb;

n:=trunc(Pi/(restr*angle));
x1:=x0;y1:=y0;
L_finale:=POINTS([x0,y0],COLOR(RGB,0,0,0),SYMBOL(CROSS));
L_aux:=NULL;
L_points:=NULL;

d:=DT*c(x1,y1)/sqrt(E);
x2:=evalf(d+x1);
y2:=evalf(y1);
if est_en_mer(x2,y2) then
    L_aux:=L_aux,[x2,y2,0];
    L_points:=L_points,[x2,y2];
else x2:=x1;y2:=y1;
fi;

```

```

for k from 1 to 2*restr*n-1 do
  x3:=evalf(d*cos(k*angle)+x1);
  y3:=evalf(d*sin(k*angle)+y1);
  if est_en_mer(x3,y3) then
    if(sqrt((x3-x2)**2+(y3-y2)**2)>epsilon) then
      L_aux:=L_aux,[x3,y3,k];
      L_points:=L_points,[x3,y3];
      x2:=x3;y2:=y3;
    fi; fi;
od;

L_finale:=L_finale, POLYGONS([L_points],COLOR(HUE,0));
L_points:=NULL;
L_aux:=[L_aux];

for j from 1 to prof-1 do
  L_aux2:=NULL;

  for i from 1 to nops(L_aux) do
    x1:=L_aux[i][1];
    y1:=L_aux[i][2];
    ori:=L_aux[i][3];

    d:=DT*c(x1,y1)/sqrt(E);
    #####si i =1
    if(i=1) then
      x2:=evalf(d*cos((ori-n+2)*angle)+x1);
      y2:=evalf(d*sin((ori-n+2)*angle)+y1);
      L_aux2:=L_aux2,[x2,y2,k];
      L_points:=L_points,[x2,y2];
      if est_en_mer(x2,y2) then
        L_aux2:=L_aux2,[x2,y2,k];
        L_points:=L_points,[x2,y2];
      else x2:=x1;y2:=y1;
    fi;
    deb:=ori-n+3;
    else deb:=ori-n+2;
  fi;##### fin si ori=1
  for k from (deb) to ori+n-2 do
    x3:=evalf(d*cos(k*angle)+x1);
    y3:=evalf(d*sin(k*angle)+y1);

    if est_en_mer(x3,y3) then

      if(sqrt((x3-x2)**2+(y3-y2)**2)>epsilon) then
        L_aux2:=L_aux2,[x3,y3,k];

```

```

    L_points:=L_points,[x2,y2];
        x2:=x3;y2:=y3;
        fi;
fi; od;

od;
L_aux:=[L_aux2];
L_finale:=L_finale, POLYGONS([L_points],COLOR(HUE,j/prof),STYLE
(PATCHNOGRID));
L_points:=NULL;

od;
[L_finale];
end:

```

▼ Modèle 2 - Algorithme étape par étape

Les algorithmes créés étant toujours trop longs, on effectue les calculs étape après étape. C'est à dire qu'on calcule les points d'un instant donné t (rang k), puis on relance l'algorithme avec ce résultat pour qu'il calcule les points à l'instant $t+dt$ (rang $k+1$).

Pour accélérer encore le temps de calcul, on utilise deux méthodes d'élimination des points parasites :

- On supprime les points situés à moins de $\text{Rapport} \times \text{Distance_moyenne_à_epicentre}$ de l'épicentre (les points qui sont allés trop en arrière, qui sont à la traîne)
- On supprime les points qui sont à moins de ϵ des uns des autres

```

> modele_2_it_purifie_rang0:=proc(x0,y0,DT,angle,restr,epsilon)
    local n,d,ori,k,i,l,j,L_aux,L_aux2,x1,y1,x2,y2,x3,y3,deb;

    x1:=x0;y1:=y0;
    L_aux:=NULL;
    n:=trunc(Pi/(angle));
    d:=DT*c(x1,y1)/sqrt(700000);
    x2:=evalf(d+x1);
    y2:=evalf(y1);

    if est_en_mer(x2,y2) then
        L_aux:=L_aux,[x2,y2,0];
    else x2:=x1;y2:=y1;
    fi;

    for k from 1 to 2*n-1 do
        x3:=evalf(d*cos(k*angle)+x1);
        y3:=evalf(d*sin(k*angle)+y1);
    end do;
end proc;

```

```

        if est_en_mer(x3,y3) then
        if(sqrt((x3-x2)**2+(y3-y2)**2)>epsilon) then
            L_aux:=L_aux,[x3,y3,k];
            x2:=x3;y2:=y3;
            fi; fi;
    od;
    [L_aux];
end:
>
> modele_2_it_purifie_rangk:=proc(x0,y0,DT,angle,restr,epsilon,facteur,L_aux)
local n,d,ori,k,i,l,L_aux2,Suppr,Result,x1,y1,x2,y2,x3,y3,deb,aux,fin,
Rmoyen;

n:=trunc(Pi/angle);
L_aux2:=NULL;

for i from 1 to nops(L_aux) do
    x1:=L_aux[i][1];
    y1:=L_aux[i][2];
    ori:=L_aux[i][3];

    d:=DT*c(x1,y1)/sqrt(700000);
#####si i =1
    if(i=1) then
        x2:=evalf(d*cos((ori-restr)*Pi/n)+x1);
        y2:=evalf(d*sin((ori-restr)*Pi/n)+y1);
        L_aux2:=L_aux2,[x2,y2,k];
        if est_en_mer(x2,y2) then L_aux2:=L_aux2,[x2,y2,ori];
            else x2:=x1;y2:=y1;
        fi;
    deb:=ori-restr+1;
    else deb:=ori-restr;
    fi;#####

    fin:=ori+restr;
    if(deb>fin) then fin:=deb; deb:=ori+restr; fi;
    for k from ori to fin do
        x3:=evalf(d*cos(k*Pi/n)+x1);
        y3:=evalf(d*sin(k*Pi/n)+y1);

        if est_en_mer(x3,y3) then

            if(sqrt((x3-x2)**2+(y3-y2)**2)>epsilon) then
                L_aux2:=L_aux2,[x3,y3,k];
                x2:=x3;y2:=y3;

```

```

        fi;
fi; od;
for k from deb to ori do
    x3:=evalf(d*cos(k*Pi/n)+x1);
    y3:=evalf(d*sin(k*Pi/n)+y1);

    if est_en_mer(x3,y3) then

        if(sqrt((x3-x2)**2+(y3-y2)**2)>epsilon) then
            L_aux2:=L_aux2,[x3,y3,k];
            x2:=x3;y2:=y3;
        fi;
    fi; od;

od;

##### fonction de purification 1 (point trop
pres)
L_aux2:={L_aux2};
Suppr:=NULL;
Result:=NULL;
i:=1;
while i< nops(L_aux2) do
    x1:=L_aux2[i][1];
    y1:=L_aux2[i][2];
    Result:=Result,L_aux2[i];
    for k from (i+1) to nops(L_aux2) do
        x2:=L_aux2[k][1];
        y2:=L_aux2[k][2];
        if(evalf(sqrt((x1-x2)**2+(y1-y2)**2))<epsilon) then
            Suppr:=Suppr,L_aux2[k];
        fi;
    od;
    L_aux2:=L_aux2 minus {Suppr};
    i:=i+1;
od;
L_aux2:=[op({Result} union L_aux2)];

##### fonction de purification 2 (point dans le
disque de rayon Rmoyen*facteur)
Rmoyen:=0;
for k from 1 to nops(L_aux2) do Rmoyen:=Rmoyen + sqrt( (L_aux2[k][1]-x0)**
2+(L_aux2[k][2]-y0)**2); od;
Rmoyen:=Rmoyen/(nops(L_aux2));

Suppr:=NULL;

```

```

for k from 1 to nops(L_aux2) do
  if(sqrt( (L_aux2[k][1]-x0)**2+(L_aux2[k][2]-y0)**2)<=Rmoyen*facteur) then
    Suppr:=Suppr,L_aux2[k];
  fi;
od;
L_aux2:=[op({op(L_aux2)} minus {Suppr})];

L_aux2;

end:

```

```
>
```

```
>
```

▼ Modèle 2 - Procédures d'affichage

```

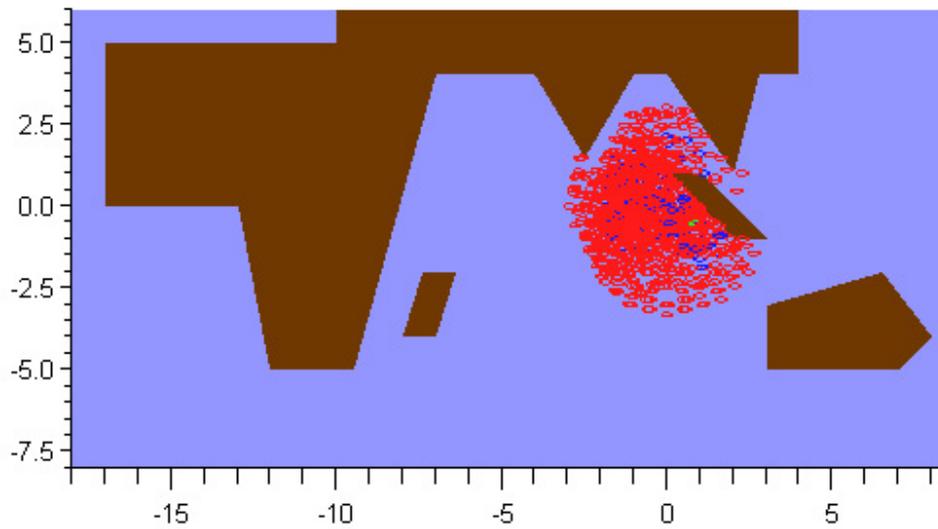
> donne_points_m2:=proc(L_aux,ind,max)
  local L_points;
  L_points:=POINTS([x0,y0],COLOR(RED,0,0,0),SYMBOL(CROSS));
  L_points:=seq(POINTS([L_aux[k][1],L_aux[k][2]],COLOR(HUE,ind/max)),
k=1..nops(L_aux));
  L_points;
end:

> donne_polygones_m2:=proc(L_aux,ind,max,Style)
  POLYGONS([seq([L_aux[k][1],L_aux[k][2]],k=1..nops(L_aux))],COLOR(HUE,
ind/max),STYLE(Style),THICKNESS(0),LINESTYLE(0));

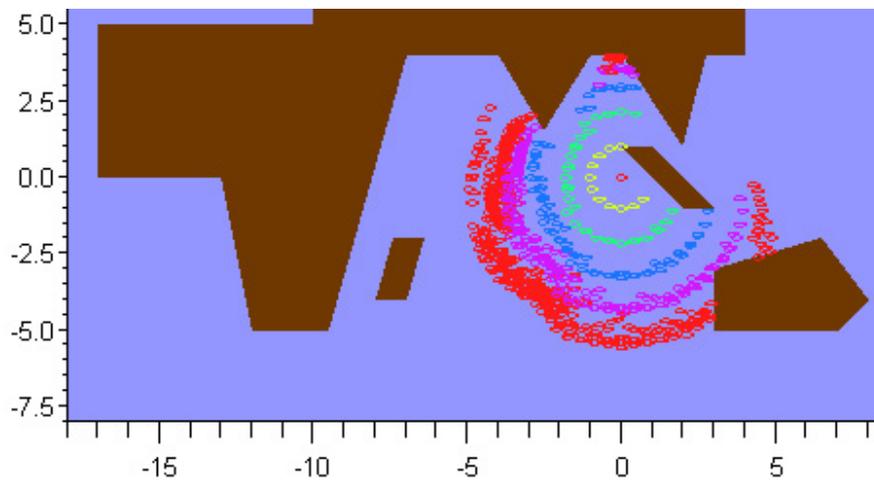
end:

```

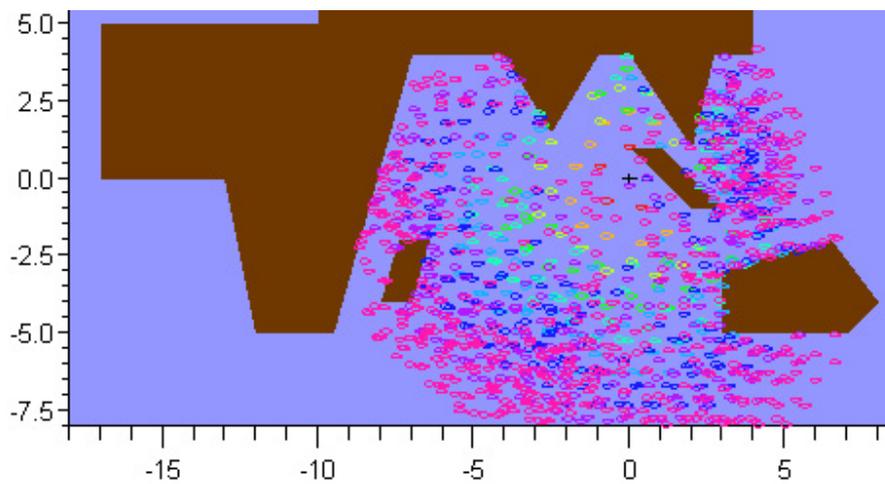
```
> modele_2_rec(x0,y0,3600,Pi/4,3,1,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);
```



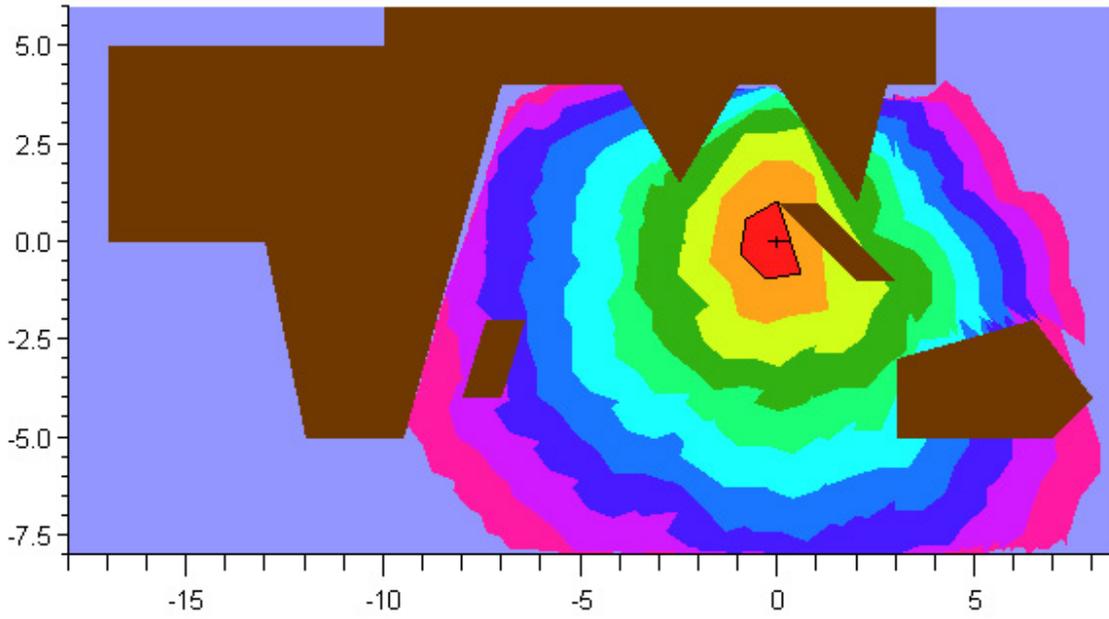
```
> modele_2_rec(x0,y0,3600,Pi/8,5,7,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);
```



```
> affiche(modele_2_it(x0,y0,3600,Pi/8,3,4,0.5),Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);
```



```
> affiche(modele_2_it_polygones(x0,y0,3600,Pi/10,10,2,0.7),Xmin,Xmax,Ymin,Ymax)  
;
```



```
>  
>
```

>

▼ Modèle 2 - Exemple

```

>
> L0_p:=NULL:L1_p:=NULL:L2_p:=NULL:L3_p:=NULL:L4_p:=NULL:L5_p:=NULL:L6_p:=
  NULL:L7_p:=NULL:L8_p:=NULL:L9_p:=NULL:L10_p:=NULL:
> L0_p1:=NULL:L1_p1:=NULL:L2_p1:=NULL:L3_p1:=NULL:L4_p1:=NULL:L5_p1:=
  NULL:L6_p1:=NULL:L7_p1:=NULL:L8_p1:=NULL:L9_p1:=NULL:L10_p1:=NULL:
> L0:=[]:L1:=[]:L2:=[]:L3:=[]:L4:=[]:L5:=[]:L6:=[]:L7:=[]:L8:=[]:L9:=[]:L10:=
  []:
>
> Dt:=:
> Angle:=:
> N:=10:Style:=PATCHNOGRID:
>

```

▼ Calcul

```

> L0 :=modele_2_it_purifie_rang0(x0,y0,3600,Pi/20,0,0):
> L1 :=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,10,0.3,3/4,L0):
> L2 :=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,10,0.2,2/3,L1):
> L3 :=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,10,0.3,3/5,L2):
> L4 :=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,10,0.3,4/5,L3):
> L5 :=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,10,0.5,1/2,L4):
> L6 :=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,10,0.5,1/2,L5):
> L7 :=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,10,0.5,1/2,L6):
> L8 :=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,5,0.7,2/3,L7):
> L9 :=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,5,0.7,2/3,L8):
> L10:=modele_2_it_purifie_rangk(x0,y0,3600,Pi/20,5,0.7,2/3,L9):
>

```

▼ Affichage de points

```

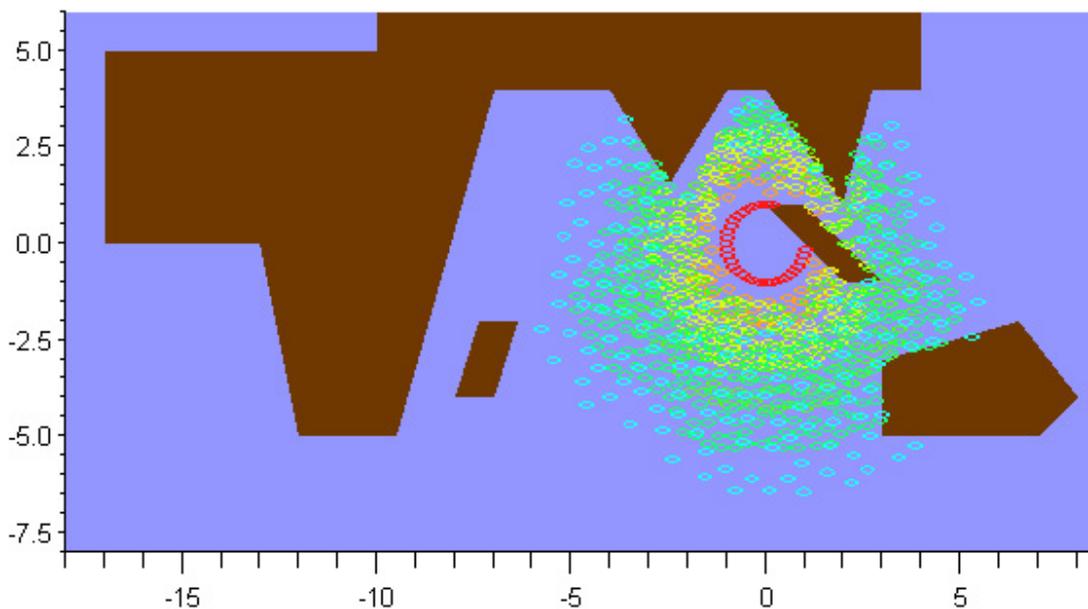
>
> L0_p :=donne_points_m2(L0,0,N):
> L1_p :=donne_points_m2(L1,1,N):
> L2_p :=donne_points_m2(L2,2,N):
> L3_p :=donne_points_m2(L3,3,N):
> L4_p :=donne_points_m2(L4,4,N):
> L5_p :=donne_points_m2(L5,5,N):
> L6_p :=donne_points_m2(L6,6,N):
> L7_p :=donne_points_m2(L7,7,N):
> L8_p :=donne_points_m2(L8,8,N):
> L9_p :=donne_points_m2(L9,9,N):

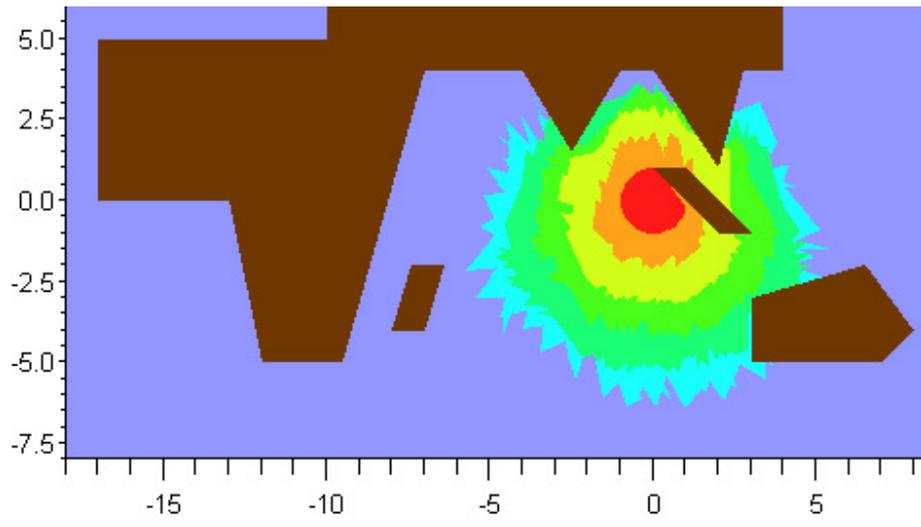
```

```
> L10_p:=donne_points_m2(L10,10,N) :
>
> affiche([L0_p,L1_p,L2_p,L3_p,L4_p,L5_p,L6_p,L7_p,L8_p],Xmin,Xmax,Ymin,
Ymax) ;
```

▼ Affichage de polygones

```
>
> L0_pl :=donne_polygones_m2(L0,0,N,Style) :
> L1_pl :=donne_polygones_m2(L1,1,N,Style) :
> L2_pl :=donne_polygones_m2(L2,2,N,Style) :
> L3_pl :=donne_polygones_m2(L3,3,N,Style) :
> L4_pl :=donne_polygones_m2(L4,4,N,Style) :
> L5_pl :=donne_polygones_m2(L5,5,N,Style) :
> L6_pl :=donne_polygones_m2(L6,6,N,Style) :
> L7_pl :=donne_polygones_m2(L7,7,N,Style) :
> L8_pl :=donne_polygones_m2(L8,8,N,Style) :
> L9_pl :=donne_polygones_m2(L9,9,N,Style) :
> L10_pl:=donne_polygones_m2(L10,10,N,Style) :
>
> affiche([L0_pl,L1_pl,L2_pl,L3_pl,L4_pl,L5_pl,L6_pl,L7_pl,L8_pl],Xmin,
Xmax,Ymin,Ymax) ;
```





VI. Méthode des différences finies :

VI.1. Principe :

Les équations de Saint Venant peuvent se simplifier dans le cas d'un mouvement unidirectionnel pour donner l'équation Korteweg-de-Vries :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{A_0} \eta\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\beta}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

$$\text{avec : } \alpha = \frac{A_0}{H} \quad \beta = \frac{H^2}{\lambda^2}$$

Pour résoudre cette équation on utilise la méthode des éléments finis. On discrétise en temps et en espace le problème (ici de façon linéaire). :

$$\eta_k^j = \eta(k.\Delta x, j.\Delta t)$$

Discrétisation en temps : $\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) \leftrightarrow \frac{\eta_k^{j+1} - \eta_k^j}{\Delta t}$ (différence à droite)

Discrétisation en espace : $\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t) \leftrightarrow \frac{\eta_{k+1}^j - \eta_k^j}{\Delta x}$ (différence à droite)

$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}(x, t) \leftrightarrow \frac{1}{(\Delta x)^3} \left(\frac{1}{2} (\eta_{k+3}^{j+1} - 3\eta_{k+1}^{j+1} + 3\eta_{k-1}^{j+1} - \eta_{k-3}^{j+1}) + \frac{1}{2} (\eta_{k+3}^j - 3\eta_{k+1}^j + 3\eta_{k-1}^j - \eta_k^j) \right)$ (Schéma de Crank-Nicholson)

VI.2. Algorithmes Maple

```
[> restart:with(plots):
```

▼ Initialisation

Equation Korteweg De Vries

```
> alpha:='alpha':beta:='beta':  
diff(eta(x,t),t)+(1+3/2*alpha*eta(x,t))*Diff(eta(x,t),x)+beta/6*Diff(Diff  
(Diff(eta(x,t),x),x),x)=0;
```

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) + \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \eta(x, t)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \eta(x, t)\right) + \frac{1}{6} \beta \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta(x, t)\right) = 0 \quad (1.1)$$

```
>
```

Solution analytique : l'onde solitaire

```
> eta_solitaire:=(x,t)->A0*cosh(sqrt(3*A0/(4*H**3))*(x-x0-v*t))^(-2);
```

$$\eta_{solitaire} := (x, t) \rightarrow \frac{A0}{\cosh\left(\sqrt{\frac{3}{4} \frac{A0}{H^3}} (x - x0 - vt)\right)^2} \quad (1.2)$$

Bosse initiale et fond

```
> A0:=4: #amplitude de la bosse initiale  
H:=4000: #profondeur au large  
L:=100000: #largeur de la bosse initiale  
d:=1000000: #Distance à la côte (pour onde sol prendre 1300000)  
lambda:=300000: #longueur d'onde  
limf:=d: # limite fenêtre  
t0:=0:  
x0:=100000: #(pour onde sol prendre 300000)  
v:=sqrt(9.81*H):  
h:= x->H/2*tanh((x-d+150000)/50000)-H/2:  
  
#eta_initial:=x->piecewise(abs(x-x0)<L,A0*sin(Pi*(x-x0)/(L)),0);  
#eta_initial:=x->piecewise(x<=0,0,x<(3*L/4),A0,x>=3*L/4,-16*x/L+16,x>=L,0,  
0);  
#eta_initial:=x->eta_solitaire(x,0); #meme bosse que l'onde  
solitaire  
eta_initial:=x->A0*exp(-(3*(x-x0)/(L))**2): # resultat empirique
```

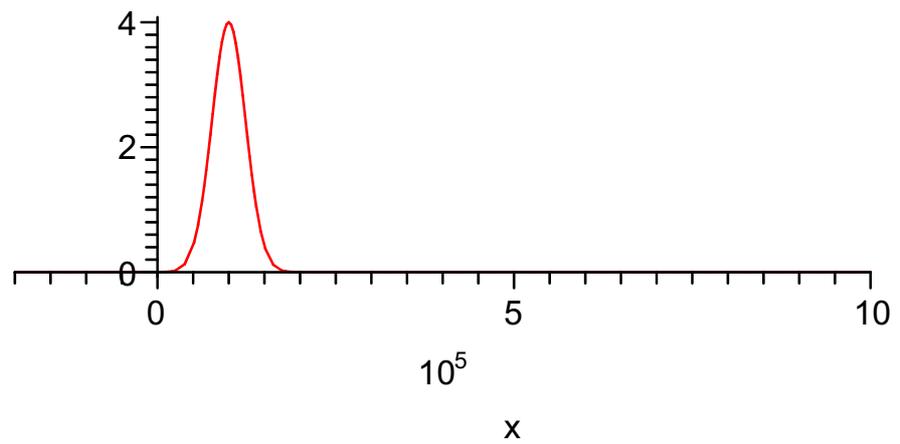
```
>
```

▼ Graphes

```
>
```

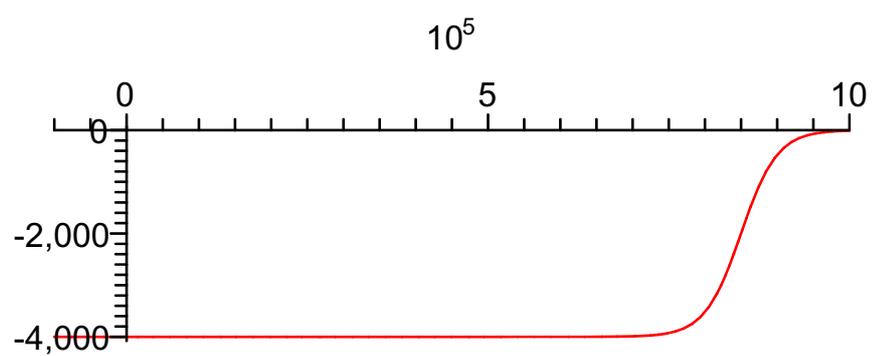
```
> plot(eta_initial(x),x=-2*L..d,title="Bosse initiale");
```

Bosse initiale



```
> plot(h(x),x=-L..d,title="fond oceanique");
```

fond oceanique



```
>
```

```
>
```

▼ Fonctions auxiliaires - Affichage

```
>
```

Affichage

```
> affiche_instant:=proc(tab)
  local i,Liste;

  Liste:=[0,0];
  for i from 1 to K do
    if abs(tab[i]) <= 0.00001 then Liste:=Liste,[i*Dx,0];
    else Liste:=Liste,[i*Dx,tab[i]];
  fi;od;
  Liste:=Liste,[0,0];
  PLOT(
    POLYGONS([Liste],STYLE(LINE),COLOR(ZHUE)),
```

```

    AXESSTYLE (NORMAL) ,
    VIEW(0..limf,-4..4) )      # VIEW(-2*L..d,-2..4) )
end:
> pre_aff:=proc (tab,j)
  local i,Liste;
  Liste:=[0,0];
  for i from 1 to K do
    if abs(tab[i]) <= 0.00001 then Liste:=Liste,[i*Dx,0];
    else Liste:=Liste,[i*Dx,tab[i]];
  fi;od;
  Liste:=Liste,[0,0];
  POLYGONS ([Liste],STYLE (LINE),COLOR (HUE,j));
end:
> affiche:=proc (arg,xmin,xmax,ymin,ymax)
  PLOT (
    op (arg) ,
    AXESSTYLE (NORMAL) ,
    VIEW(xmin..xmax,ymin..ymax) )
end:
>
> calcul_vitesse:=proc (k,d)
  d*10**5/(k*Dt);
end:
>

```

a,b,c sont des constantes dont les expressions s'obtiennent en développant les calculs.

c, correspond a la coherence du modele, ou plutot a la stabilite de la modelisation numerique (le pas d'echantillonnage doit etre inferieur au temps que met la vague pour se propager d'un point de la grille au suivant. D'ou $c < 1$).

```

> lambda:=300000:
  tfinal:=3600:
  alpha:=1/H:
  beta:=H**2/lambda**2:
>
  Dt:=3:
  Dx:=20000:
  K:=trunc((limf)/(3*Dx));
  N:=trunc((tfinal-t0)/Dt+1);

  c:=evalf((v*Dt)/Dx);
  b:=evalf(beta*(v*Dt)/(2*6*Dx^3));
  a:=evalf((v*Dt)/Dx*3/2*alpha);

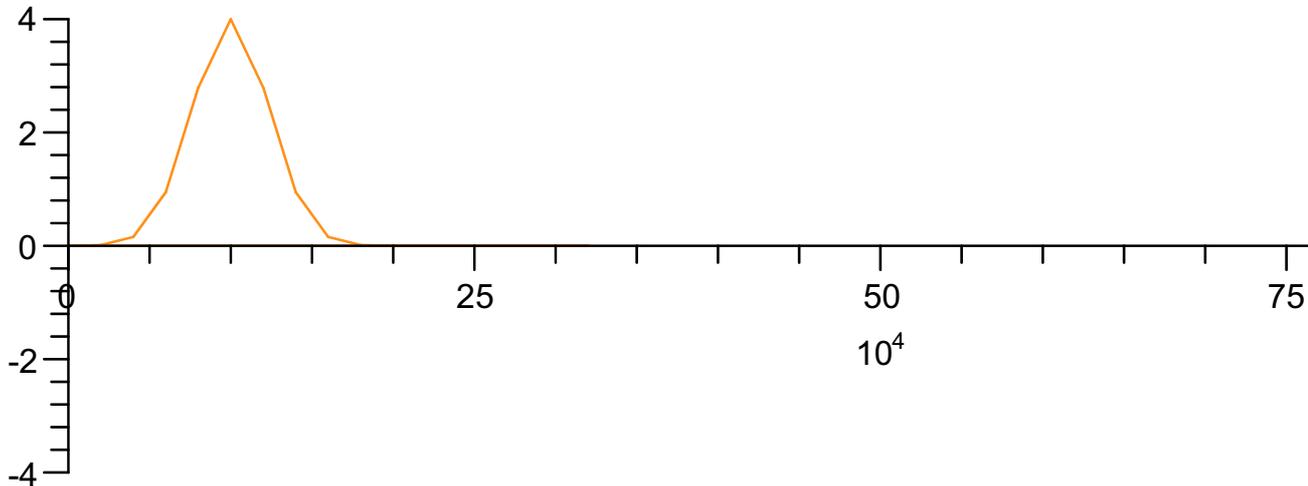
  Y:=array(1..N):
  f_y1 := i->if abs(evalf(eta_initial(i*Dx))) > 0.0001 then evalf(eta_initial
(i*Dx)); else 0; fi:
  Y[1]:=vector(K,f_y1):

```

Le vecteur Y contient dans la case n les K ordonnées du tsunami au temps n*DT pour les abscisses allant de x0 à K*Dx

Bosse initiale discetisée :

```
> affiche_instant(Y[1]);
```



```
> #a:='a':b:='b':c:='c':
```

```
> #K:=5: Y:=array(1..5):Y[1]:=array(1..K):
```

```
>
```

▼ I - Discrétisation : modèle 1

```
>
> calcul_suivant:=proc(Y)
  local R,i;
  R:=array(1..K);
  R[1]:=Y[1]*(1+c)+Y[2]*(3*b-c)-2*b*Y[4]+a*(Y[1])^2-a*Y[1]*Y[2];
  R[2]:=Y[2]*(1+c)+Y[3]*(3*b-c)-2*b*(Y[5]+3*Y[1])+a*(Y[2])^2-a*Y[2]*Y[3];
  R[3]:=Y[3]*(1+c)+Y[4]*(3*b-c)-2*b*(Y[6]+3*Y[2])+a*(Y[2])^2-a*Y[3]*Y[4];

  for i from 4 to K-3 do
    R[i]:=Y[i]*(1+c)+Y[i+1]*(3*b-c)-2*b*(Y[i+3]+3*Y[i-1]-Y[i-3])+a*(Y[i])^2-
    a*Y[i]*Y[i+1];
  od;

  R[K-2]:=Y[K-2]*(1+c)+Y[K-1]*(3*b-c)-2*b*(3*Y[K-3]-Y[K-5])+a*(Y[i])^2-a*Y[K-2]*Y[K-1];
  R[K-1]:=Y[K-1]*(1+c)+Y[K]*(3*b-c)-2*b*(3*Y[K-2]-Y[K-4])+a*(Y[i])^2-a*Y[K-1]*Y[K];
  R[K]:=Y[K]*(1+c)-2*b*(3*Y[K-1]-Y[K-3])+a*(Y[K])^2;
```

```

for i from 1 to K do
  if( abs(R[i]) < 0.0000000001) then R[i]:=0; fi;
od;
R;
end:

```

```

>
>
> for i from 1 to 30 do
  Y[i+1]:=calcul_suivant(Y[i]):
od:
> for i from 30 to 100 do
  Y[i+1]:=calcul_suivant(Y[i]):
od:

```

```

>
>

```

II - Discrétisation : modèle 2

```

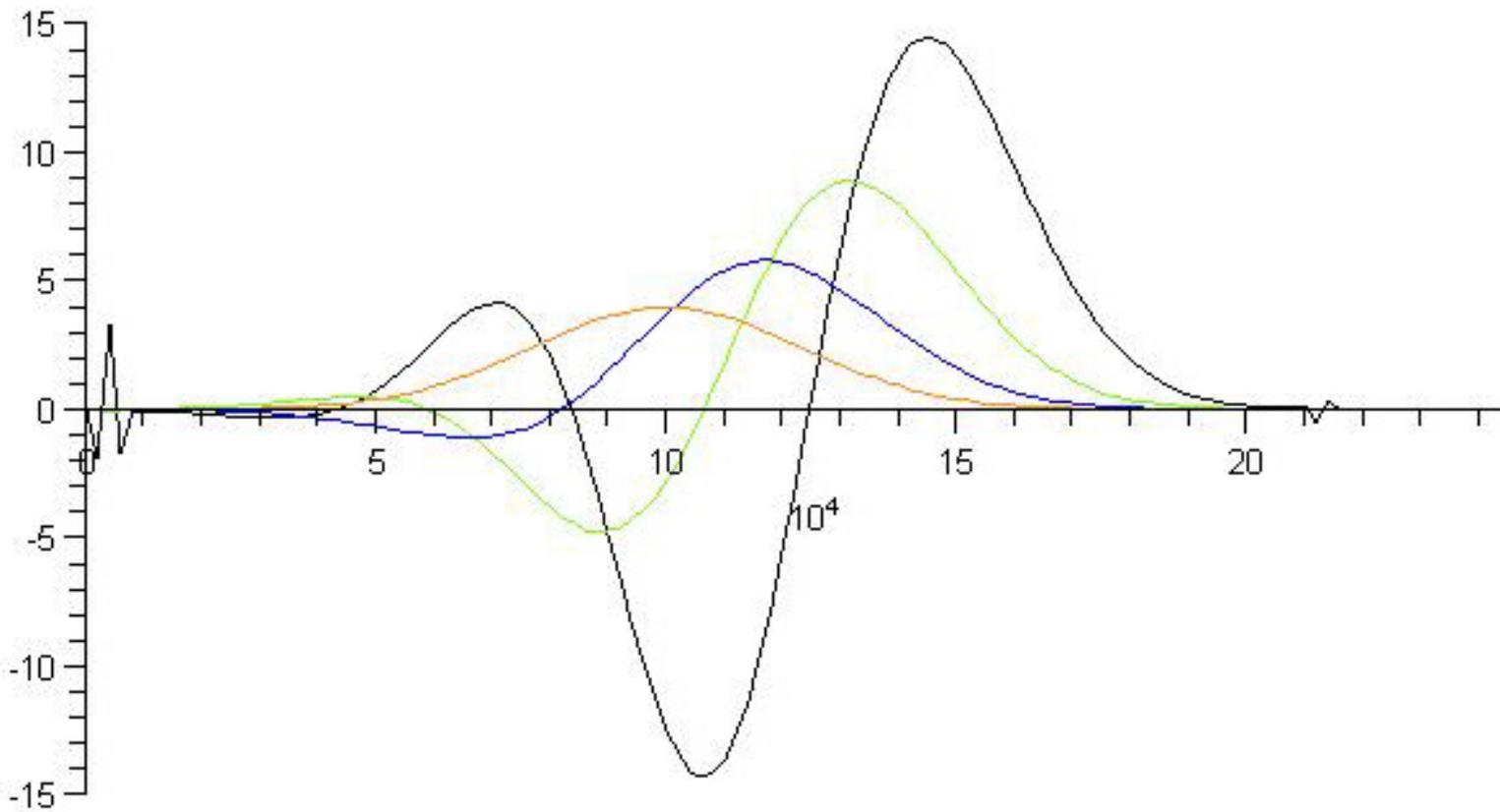
> A:=proc(Y)
  local i,R;
  R:=array(1..K);
  R[K]:=a*Y[K]^2;
  for i from 1 to K-1 do
    R[i]:=a*(Y[i])*Y[i+1]+a*(Y[i])^2;
  od;
  evalm(R);
end:
f_b:= (i,j) ->
  if i=j then evalf(1+c); else
  if i=j+1 then evalf(-3*b); else
  if i=j+3 then evalf(b); else
  if j=i+3 then evalf(-b); else
  if j=i+1 then evalf(3*b-c); else 0; fi;fi;fi;fi;fi:
f_c:= (i,j) ->
  if i=j then 1; else
  if i=j+1 then 3*b; else
  if i=j+3 then -b; else
  if j=i+1 then -3*b; else
  if j=i+3 then b; else 0; fi;fi;fi;fi;fi:
B:=Matrix(K,f_b):
C:=Matrix(K,f_c):
>
> C_I:=simplify(evalf(evalm(C^(-1)))):

```

```

>
>

```



III - Discrétisation : modèle 3

```

> A:=proc(Y)
  local i,R;
  R:=array(1..K);
  R[1]:=a*(Y[1])**2;
  for i from 2 to K do
    R[i]:=-a*(Y[i])**2+a*Y[i]*Y[i-1];
  od;
  evalm(R);
end;
f_b:= (i,j) ->
  if i=j then evalf(1-c); else
  if i=j+1 then evalf(c-3*b); else
  if i=j+3 then evalf(b); else
  if j=i+3 then evalf(-b); else
  if j=i+1 then evalf(3*b); else 0; fi;fi;fi;fi;fi:
f_c:= (i,j) ->

```

```

    if i=j then 1; else
    if i=j+1 then 3*b; else
    if i=j+3 then -b; else
    if j=i+1 then -3*b; else
    if j=i+3 then b; else 0; fi;fi;fi;fi;fi:
B:=Matrix(K,f_b):
C:=Matrix(K,f_c):
>
> C_I:=simplify(evalf(evalm(C^(-1))))):

```

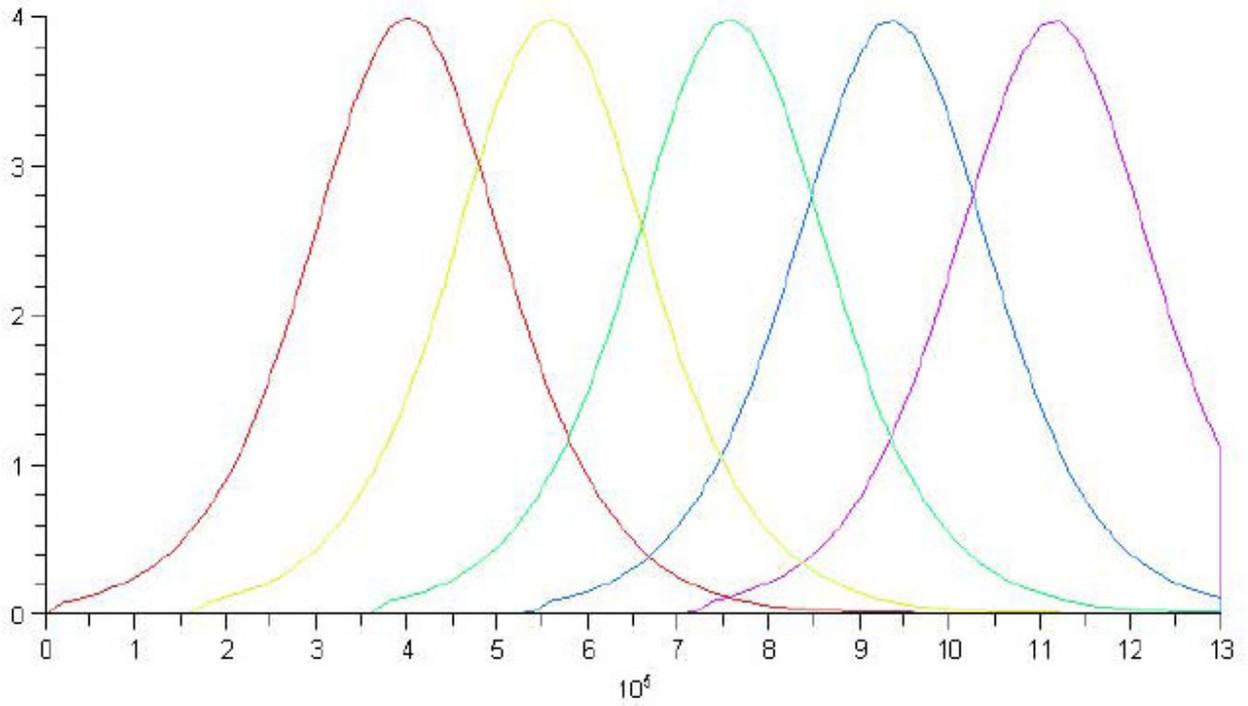
Calcul

```

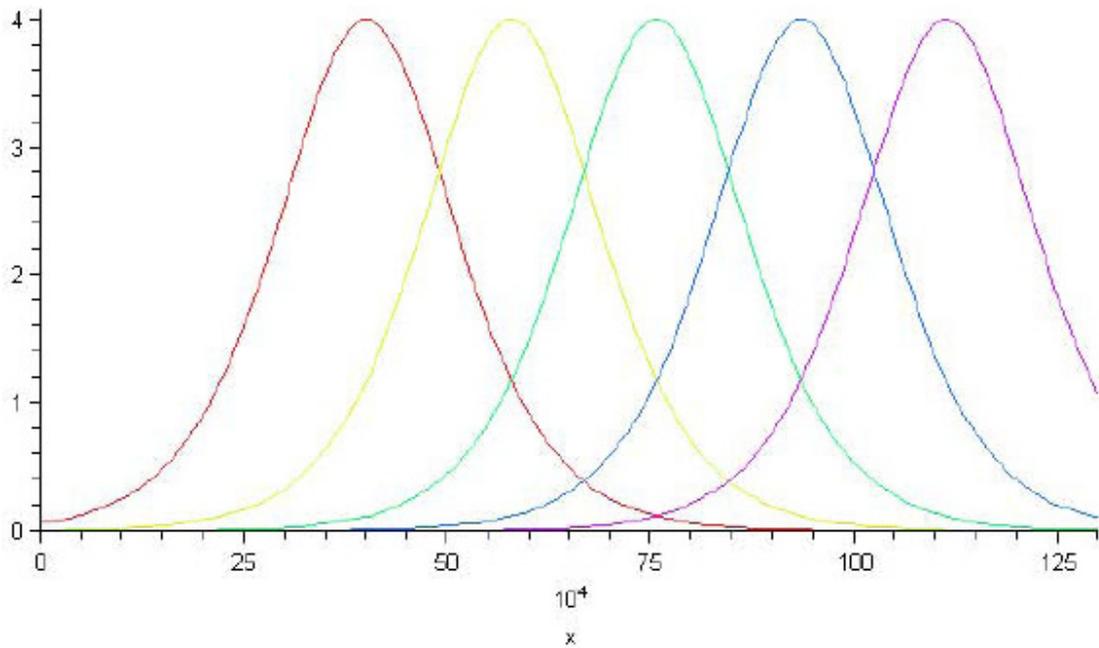
> Y[2]:=evalm(C_I*(B*Y[1]) + C_I*( A(Y[1])) ):
> Y[3]:=evalm(C_I*(B*Y[2]) + C_I*( A(Y[2])) ):
> Y[4]:=evalm(C_I*(B*Y[3]) + C_I*( A(Y[3])) ):
> Y[5]:=evalm(C_I*(B*Y[4]) + C_I*( A(Y[4])) ):
> Y[6]:=evalm(C_I*(B*Y[5]) + C_I*( A(Y[5])) ):
> Y[7]:=evalm(C_I*(B*Y[6]) + C_I*( A(Y[6])) ):
> Y[8]:=evalm(C_I*(B*Y[7]) + C_I*( A(Y[7])) ):
> Y[9]:=evalm(C_I*(B*Y[8]) + C_I*( A(Y[8])) ):
> Y[10]:=evalm(C_I*(B*Y[9]) + C_I*( A(Y[9])) ):
> Y[11]:=evalm(C_I*(B*Y[10]) + C_I*( A(Y[10])) ):
> Y[12]:=evalm(C_I*(B*Y[11]) + C_I*( A(Y[11])) ):
> Y[13]:=evalm(C_I*(B*Y[12]) + C_I*( A(Y[12])) ):
> Y[14]:=evalm(C_I*(B*Y[13]) + C_I*( A(Y[13])) ):
> Y[15]:=evalm(C_I*(B*Y[14]) + C_I*( A(Y[14])) ):
> Y[16]:=evalm(C_I*(B*Y[15]) + C_I*( A(Y[15])) ):
> Y[17]:=evalm(C_I*(B*Y[16]) + C_I*( A(Y[16])) ):
> Y[18]:=evalm(C_I*(B*Y[17]) + C_I*( A(Y[17])) ):
> Y[19]:=evalm(C_I*(B*Y[18]) + C_I*( A(Y[18])) ):
> Y[20]:=evalm(C_I*(B*Y[19]) + C_I*( A(Y[19])) ):
> Y[21]:=evalm(C_I*(B*Y[20]) + C_I*( A(Y[20])) ):
> Y[22]:=evalm(C_I*(B*Y[21]) + C_I*( A(Y[21])) ):
> for i from 1 to 20 do
    Y[i+1]:=evalm(C_I*(B*Y[i]) + C_I*( A(Y[i])) ):
od:
> for i from 21 to 37 do
    Y[i+1]:=evalm(C_I*(B*Y[i]) + C_I*( A(Y[i])) ):
od:
>
>
> calcul_vitesse(20,4);
>

```

```
> affiche( [pre_aff(Y[1],0),pre_aff(Y[9],1),pre_aff(Y[19],2),pre_aff(Y[28],3),  
pre_aff(Y[37],4)],0,4,d);
```



```
> plots[display]([seq( plot(eta_solitaire(x,900*i),x=0..d,color=COLOR(HUE,i/5))  
,i=0..4)]);
```



Conclusion

De nos jours, il faut une heure aux scientifiques des centres de détections des tsunamis, pour prévoir si une perturbation (séisme, éruption...) va provoquer un tsunami, et lancer alors un signal d'alerte aux pays qui risquent d'être touchés. Le nombre de victimes, suite au tsunami généré par le séisme de Sumatra, nous fait prendre conscience de l'importance d'améliorer nos systèmes actuels de détection et de modélisation de tsunami, pour éviter que de telles catastrophes se reproduisent. Le lieu du séisme ayant été trop rapproché des côtes, les systèmes n'ont pas eu suffisamment de temps pour donner l'alerte.

Sachant que la mise en place d'un système de repérage de tsunami dans l'océan indien aurait coûté seulement 10% des dégâts occasionnés par le raz-de-marée du 26 décembre dernier, l'installation de stations de repérage (prix moyen entre 250 000 et 500 000 Euros) peut s'avérer une opération économiquement rentable. La conclusion vient d'elle même: il faut étendre ces réseaux d'alerte à toutes les zones côtières où la sismicité est importante. C'est le cas de l'océan indien, de la mer Méditerranée et des Antilles mais aussi de certaines parties de l'océan Atlantique où les tsunamis pour être moins fréquents, n'en sont pas moins meurtriers (comme fut le cas à Lisbonne (Portugal), en 1755). 30 nouvelles bouées DART viendront s'ajouter d'ici 2007 aux six déjà installées dans le Pacifique.

Toutefois, cette technique demande des investissements importants qu'il faut relativiser. En effet, une évacuation d'une ville coûte cher : par exemple, en 1986, l'évacuation d'Honolulu à coûté 30 millions de dollars alors qu'il n'y a pas eu de tsunami.

De meilleures techniques de modélisation, prenant en compte un maximum de facteurs (vent, nature et structure du fond océanique, géométrie des côtes, variation de pression atmosphérique, de masse volumique), liées à un nombre plus importants de stations de détection pourra permettre à l'avenir de détecter plus rapidement les tsunamis et mieux prévenir les populations. A l'heure actuelle le meilleur moyen de sauver des vies reste celui d'informer la population sur le phénomène, pour qu'elle puisse fuir dès les premiers signes caractéristiques de l'arrivée d'un tsunami.

Les méthodes et idées utilisées dans ce document sont relativement simples, toutefois, les résultats numériques sont étonnamment proches des résultats observés lors du tsunami de Sumatra. L'expérience du TIPE m'aura donné un avant goût fort intéressant du travail de recherche, à une moindre échelle, et de la simulation numérique. Cette passion de la recherche je la dois notamment aux scientifiques que j'ai rencontré et qui m'ont aidé dans la réalisation de mes travaux.

Références

➤ Livres et Publications :

Thèse : The Physics of Ocean Waves (for physicists and surfers) (August 31, 2004)

Michael Twardos:

Thèse : Contribution à la dynamique des ondes de gravités non linéaires en eau peu profonde (Juin 2003)

Marc Francius, *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille*

Abstract : Theoretical comparison of tsunamis from dislocations and landslides (1998)

E. A. Okal *Department of Geological Sciences, Northwestern University, Evanston,*
C.E. Synolakis *Department of Civil Engineering, University of Southern California, Los Angeles*

Research Letter : Effect of variable bathymetry on the amplitude of teleseismic tsunamis

(1987) M. T. Woods and E. A. Okal(*)

Formation of waves by ground motion

Pierre C. Sabatier *Département de physique mathématique, Université des sciences et techniques du Languedoc, Montpellier*

Hydrodynamique physique (2001)

E. Guyon, L. Petit, J.P. Hulin

Modelling of Tsunami Propagation in the Vicinity of the French Coast of the Mediterranean

(13 Février 2001)

Efim Pelinovsky, Christian Kharif, Igor Riabov, Marc Francius

Study of tsunami propagation in the Ligurian Sea (18 Octobre 2001)

Efim Pelinovsky, Christian Kharif, Igor Riabov, Marc Francius

Assimage – Compte rendu de réunion (19 Mars 2004)

Etienne Huot

Contribution à l'étude mathématique et à la simulation numérique des écoulements des fluides géophysiques (14 Décembre 2004)

Bernard Di Martino, *chercheur à l'université de Corse*

Stabilization of a 1-D tank modeled by the shallow water equations (Juin 2002)

Christophe Prieur, Jonathan de Halleux

Rapport de Projet (ENSTA) Génération de tsunami (2001) - encadré par F. Dias(°)

➤ Notes de Cours :

Notes de cours de CPGE (2000)

M. Willaume, *professeur, Clermont Ferrand*

Notes de cours

Boujema Izrar, *professeur, Laboratoire d'Aérothermique, Orléan*

Lecture Notes on Water Waves (cours de DEA)

Frédéric Dias (°)

➤ Sites Internet :

<http://www.shoa.cl/oceano/itic/frontpage.html> : Tsunami Les Grandes Vagues (par la Commission Océanographique Intergouvernementale de l'UNESCO)

<http://www.pmel.noaa.gov> : Tsunami Research Program (modèle MOST)

<http://www.enseeiht.fr/hmf/travaux/CD0001/travaux/optsee/hym/14/tsunami.htm> : Tsunami, the Big Wave

<http://www.enseeiht.fr/travaux/CD9598/travaux/optsee/hym/nome35/fau/frame.htm> : Hydrodynamique Marine

<http://www.scubageek.com/geek/articles/wwwceler.html> : Water wave celerity

<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/image/2minrelief.html> : Bathymétrie du globe par le National Geophysical Data Center

<http://www.astrosurf.com/macombes/lfb98-avant-propos.htm> :

➤ Remerciements :

Je tiens à remercier tout particulièrement le professeur Emile A. Okal(*), professeur au Département des Sciences Géologiques à l'Université Northwestern d'Evanston, qui m'a généreusement aidé dans mon travail, ainsi que Marc Francius, « Post-doc » au TNO Dept. Electro-optics group, La Haye, et Frederic Dias(°), professeur au CMLA (centre des Mathématiques et de leurs applications), ENS Cachan, qui m'ont apporté leur soutien dans mes recherches théoriques. Ce travail aura été pour moi très enrichissant.