

Transparents TIPE 2006  
Description et modélisation des tsunamis

Emmanuel Branlard  
`emmanuel.branlard@supaero.fr`

Le 12 Juillet 2006

# **Description et modélisation des tsunamis**

## **I. Description du phénomène de tsunami**

I.1. Définition et caractéristiques

I.4. Equation caractéristique

## **II. Modélisation de la propagation sur des grandes distances**

II.1. Modélisation du fond océanique

II.2. Modèle de propagation rectiligne

II.3. Modèle selon le principe d'Huygens

## **III. Théorie plus élaborée - Différences finies**

III.1. Système d'équation - Korteweg de Vries

III.2. Méthodes des éléments finis

## **IV. Relation Magnitude/Hauteur initiale grâce à l'Energie**

IV.1. Énergie disponible

IV.2. Relation Magnitude - Hauteur initiale

## I.1. Définition et caractéristiques

### Caractéristiques :

|                   | Vagues dues au vent | Vague de tsunamis     |
|-------------------|---------------------|-----------------------|
| ➤ Longueur d'onde | 100 à 200 m         | <b>10 à 500 km</b>    |
| ➤ Vitesse         | 35 km/h             | <b>30 à 800 km/h.</b> |

### Important :

#### ➤ Quelques minutes avant l'arrivée du tsunami :

- Les vagues deviennent plus importantes
- La mer se retire étrangement



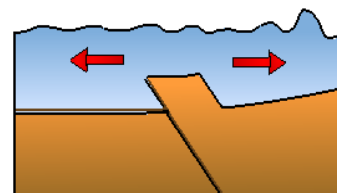
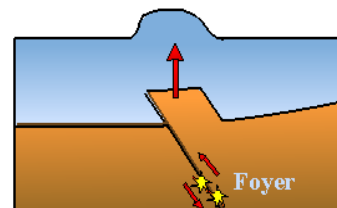
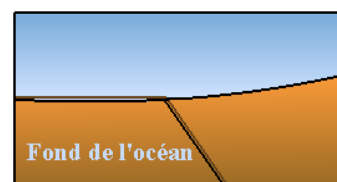
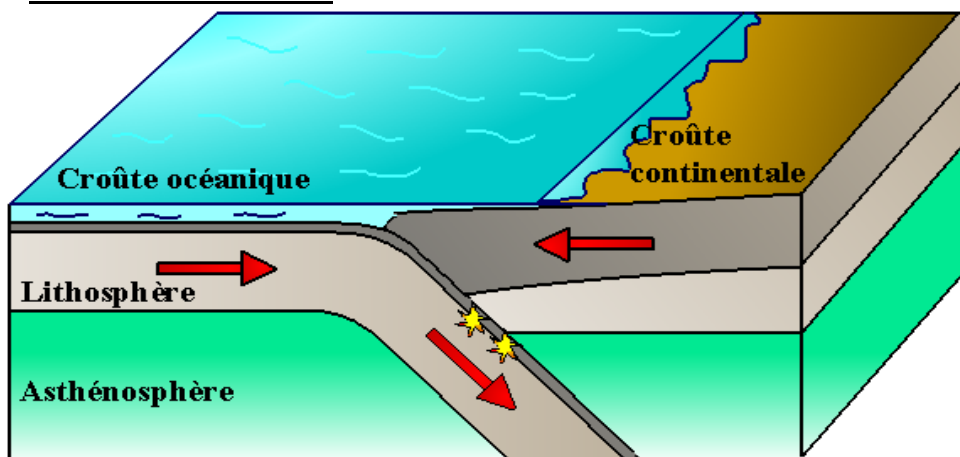
**Fuir vers les hauteurs !**

#### ➤ Il ne faut pas confondre **Tsunami** et **raz de marée**

### Origines des tsunamis :

- **Tremblements de terre (85%)**
- Éruptions volcaniques sous-marines
- Glissements de terrains
- Chutes de météorites
- Explosions nucléaires

### La subduction



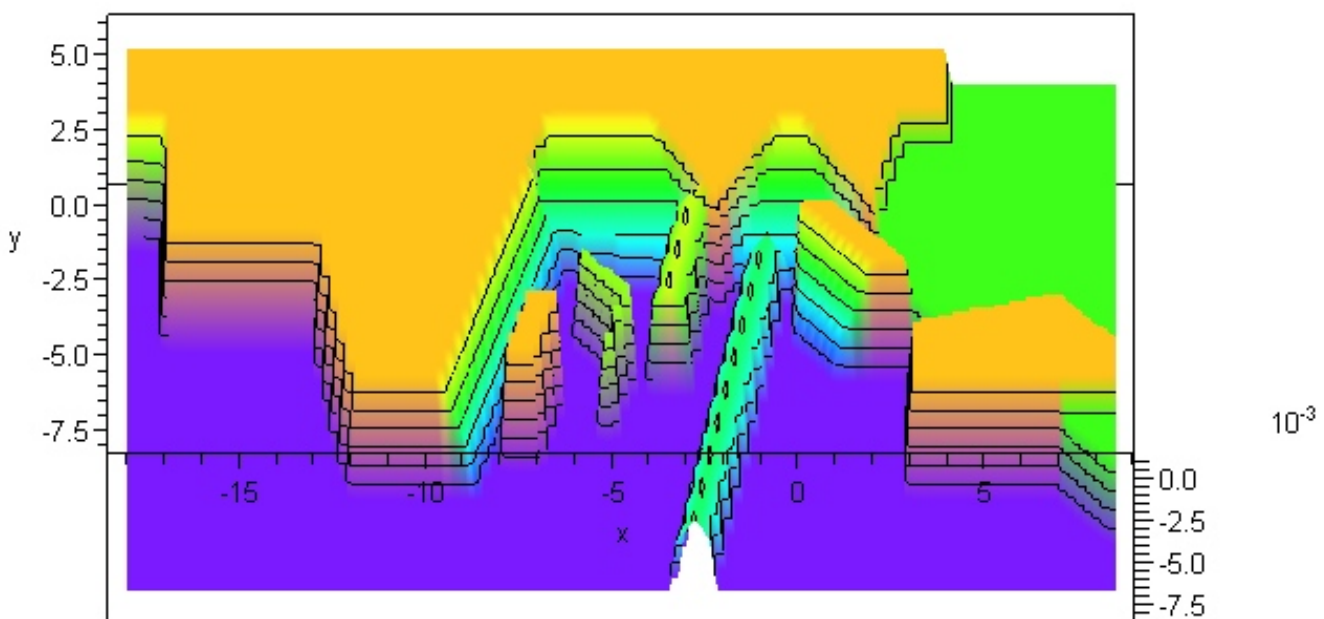
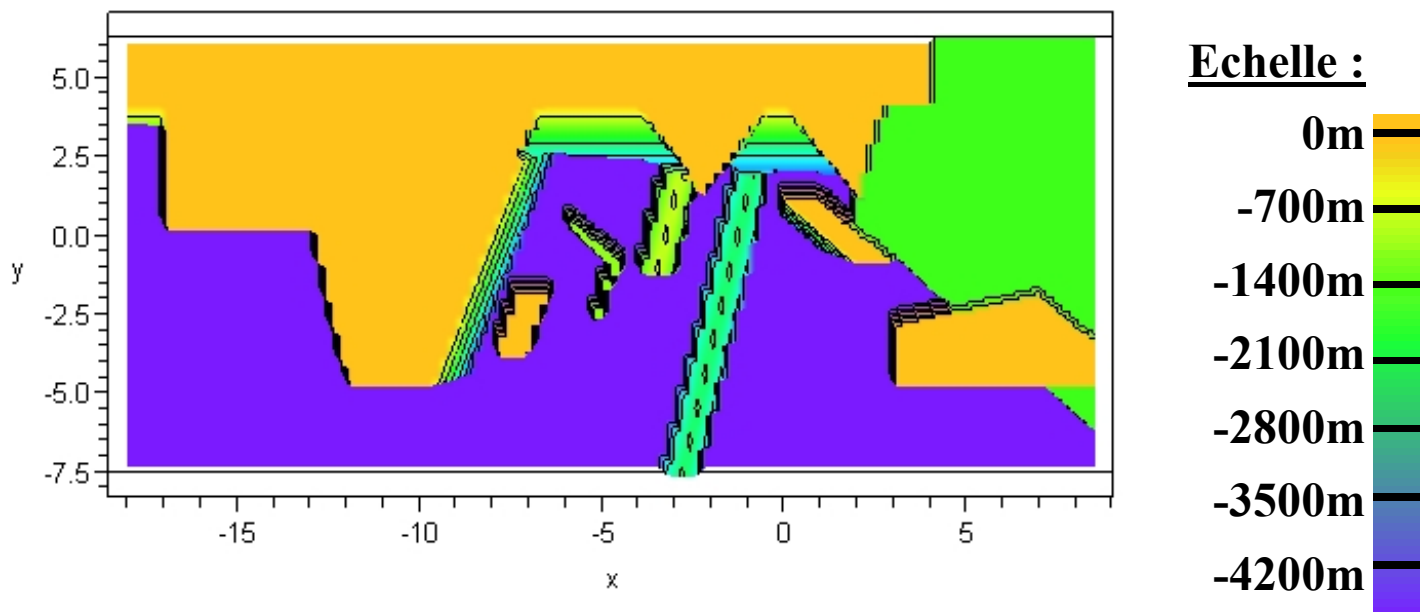
### Les séismes « tsunamigènes »

## I.4. Equation caractéristique

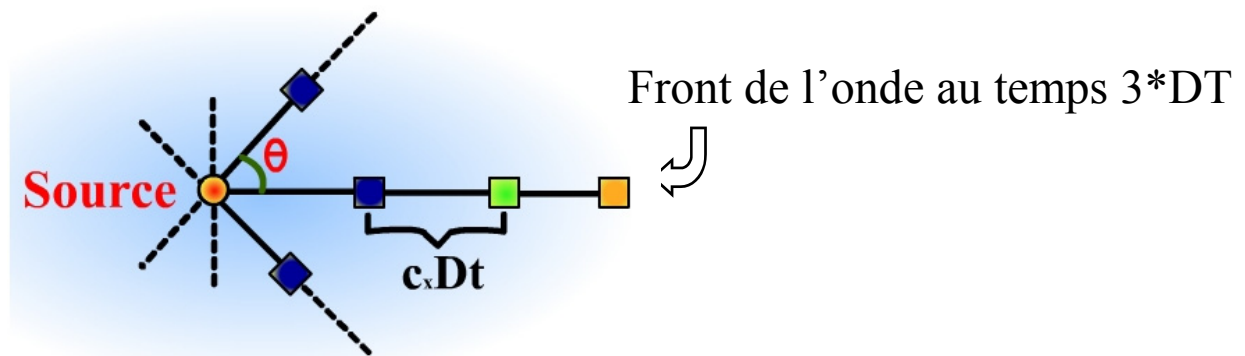
$$\boxed{\omega^2 = gk \operatorname{th}(kh)} \Rightarrow c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th}(kh)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{gh}}$$

## II. Modélisation de la propagation sur des grandes distances

### II.1. Modélisation du fond océanique



## II.2. Modèle de propagation rectiligne

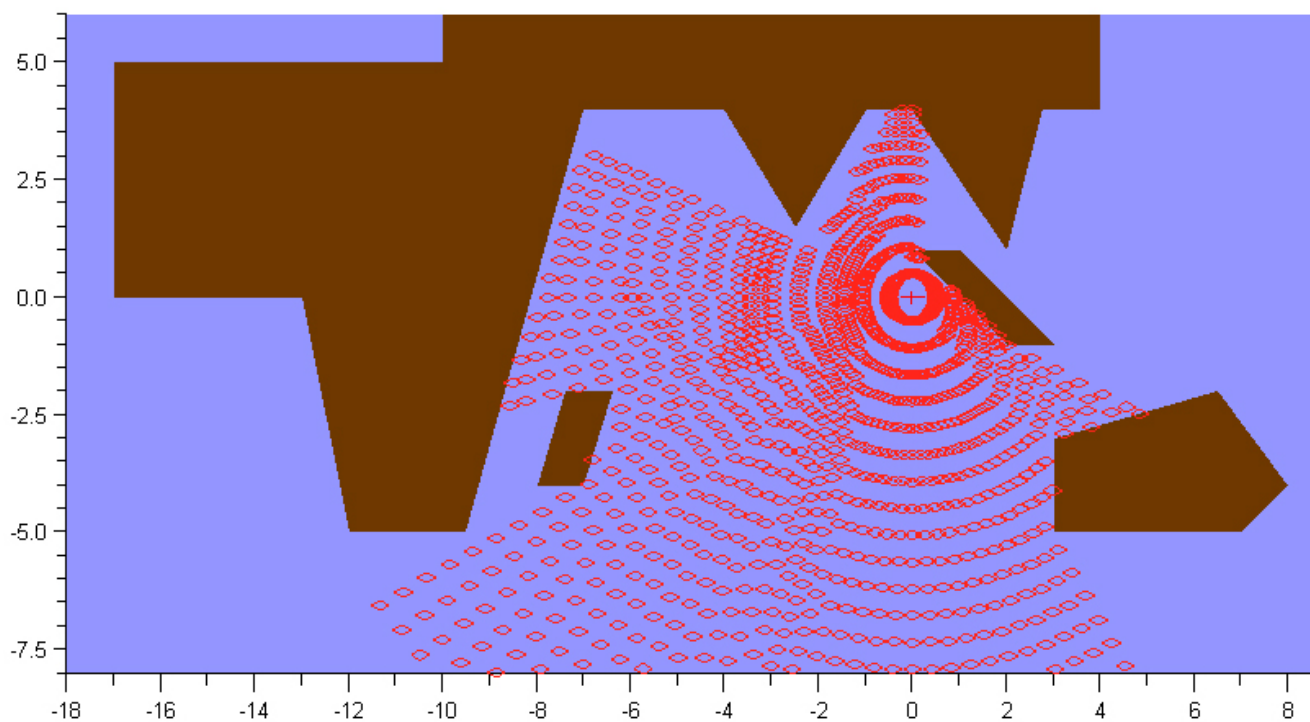


### Résultats :

|            |                   |                             |                              |
|------------|-------------------|-----------------------------|------------------------------|
| Une source | $\theta = \pi/60$ | $\Delta t = 1800 \text{ s}$ | Profondeur = $24 * \Delta t$ |
|------------|-------------------|-----------------------------|------------------------------|

Code : `affiche(modele_1(x0 , y0 , 1800 , Pi/60, 24 ,red ,1 ,false),Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);`

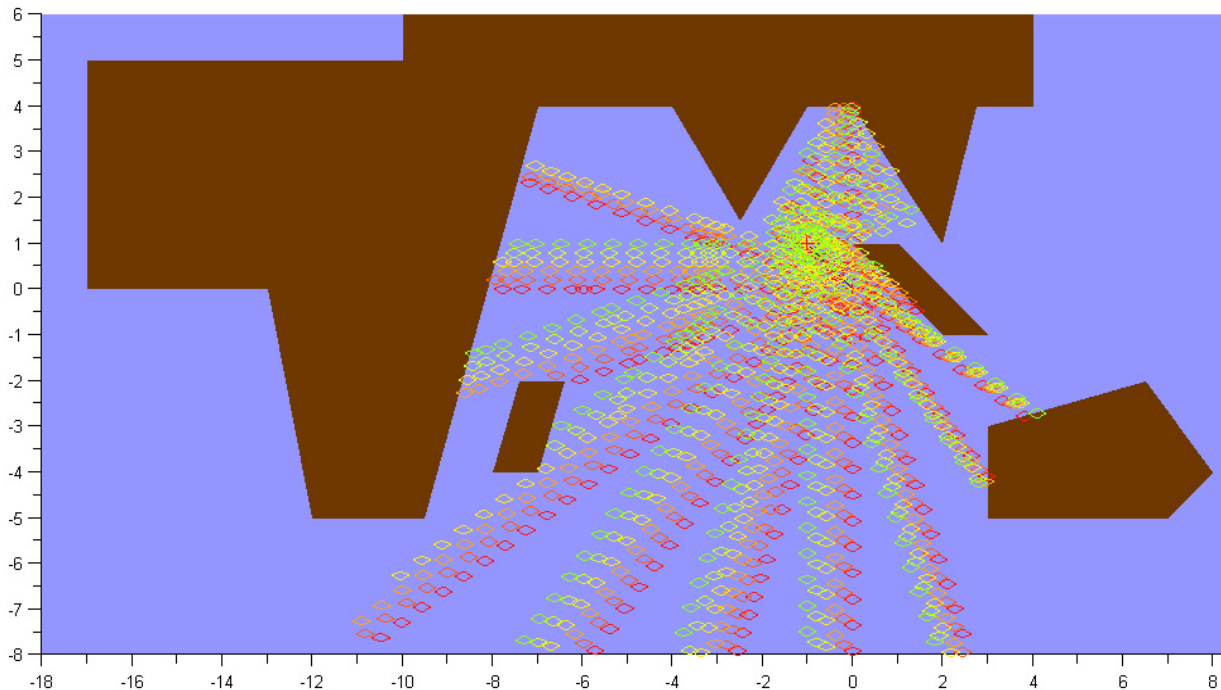
Affichage « points par points »



## Résultats :

|           |                   |                     |                              |
|-----------|-------------------|---------------------|------------------------------|
| 6 sources | $\theta = \pi/20$ | $\Delta t = 1800$ s | Profondeur = $20 * \Delta t$ |
|-----------|-------------------|---------------------|------------------------------|

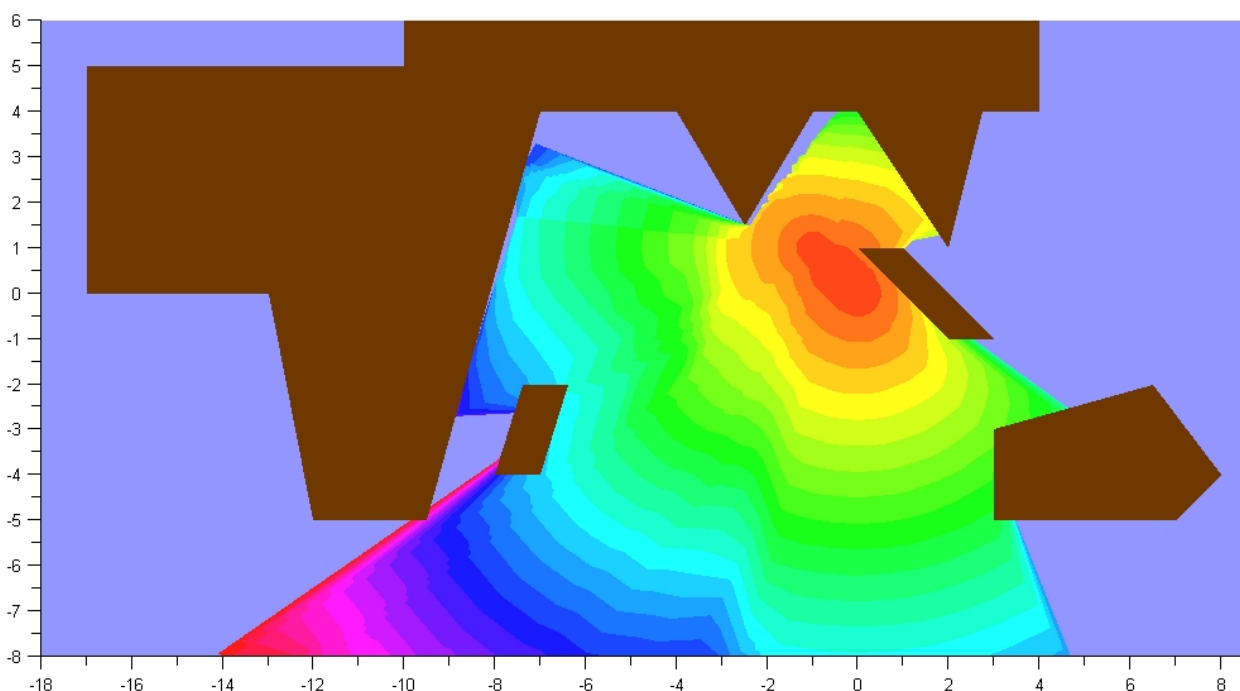
Code : `affiche_discret_m1(x0,y0,x1,y1,6,1800,Pi/20,20,false,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax);`



Affichage  
« points par  
points »

|           |                   |                     |                              |
|-----------|-------------------|---------------------|------------------------------|
| 8 sources | $\theta = \pi/30$ | $\Delta t = 1800$ s | Profondeur = $30 * \Delta t$ |
|-----------|-------------------|---------------------|------------------------------|

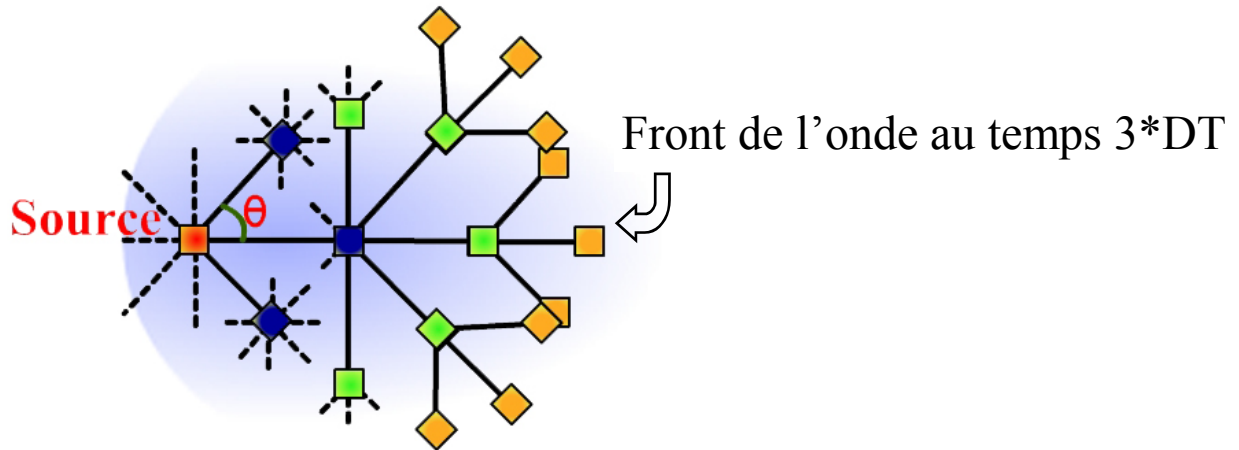
Code : `affiche_polygones_meme_instant_discret_m1(x0,y0,x1,y1,8,1800,Pi/30, 30,Style);`



Affichage  
« polygones  
de mêmes  
instants »

**\*Problème :** Le tsunami ne fait pas « le tour des îles »

### II.3. Modèle selon le principe d'Huygens



**Algorithme récursif :**

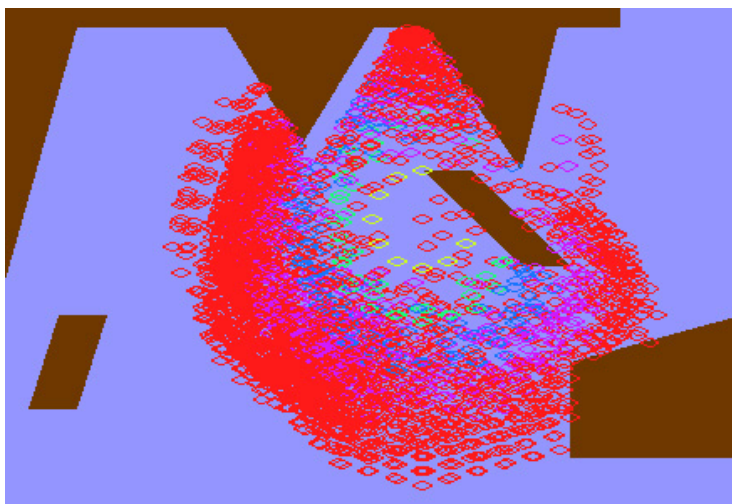
|          |                  |                             |                                  |
|----------|------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| 1 source | $\theta = \pi/6$ | $\Delta t = 3600 \text{ s}$ | Profondeur = $10 \cdot \Delta t$ |
|----------|------------------|-----------------------------|----------------------------------|

★ **Problème** : Coûteux en temps et en espace mémoire  
 $12^{10} = 62$  milliards d'appels récursifs !

- ➤ Appliquer des restrictions :
- Favoriser la direction principale de propagation

**Algorithme récursif avec restriction sur la direction:**

|          |                  |                             |                                 |                              |
|----------|------------------|-----------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| 1 source | $\theta = \pi/6$ | $\Delta t = 3600 \text{ s}$ | Profondeur = $5 \cdot \Delta t$ | $k = 3 \leftrightarrow 50\%$ |
|----------|------------------|-----------------------------|---------------------------------|------------------------------|



Code : `modele_2_rec(x0,y0, 3600 , Pi/6, 3 ,1,Xmin,Xmax, Ymin,Ymax);`

Temps de calcul : 5'

Mémoire utilisée : 4Mo

★ **Problème** : Coûteux en temps et en espace mémoire

- ➤ Utiliser un algorithme itératif pour :
- Supprimer les points à moins de  $\epsilon$  les uns des autres
  - Supprimer les points trop proches de la source

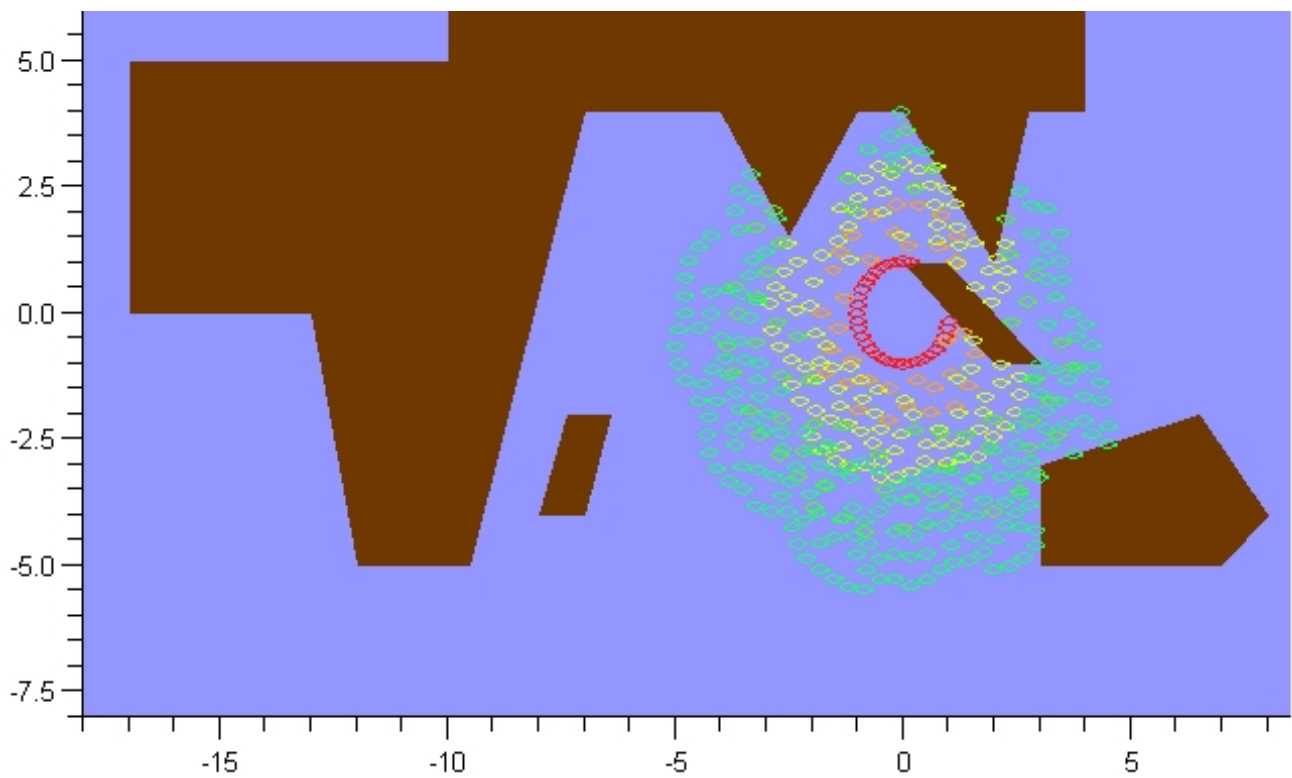


## Algorithme itératif avec restrictions :

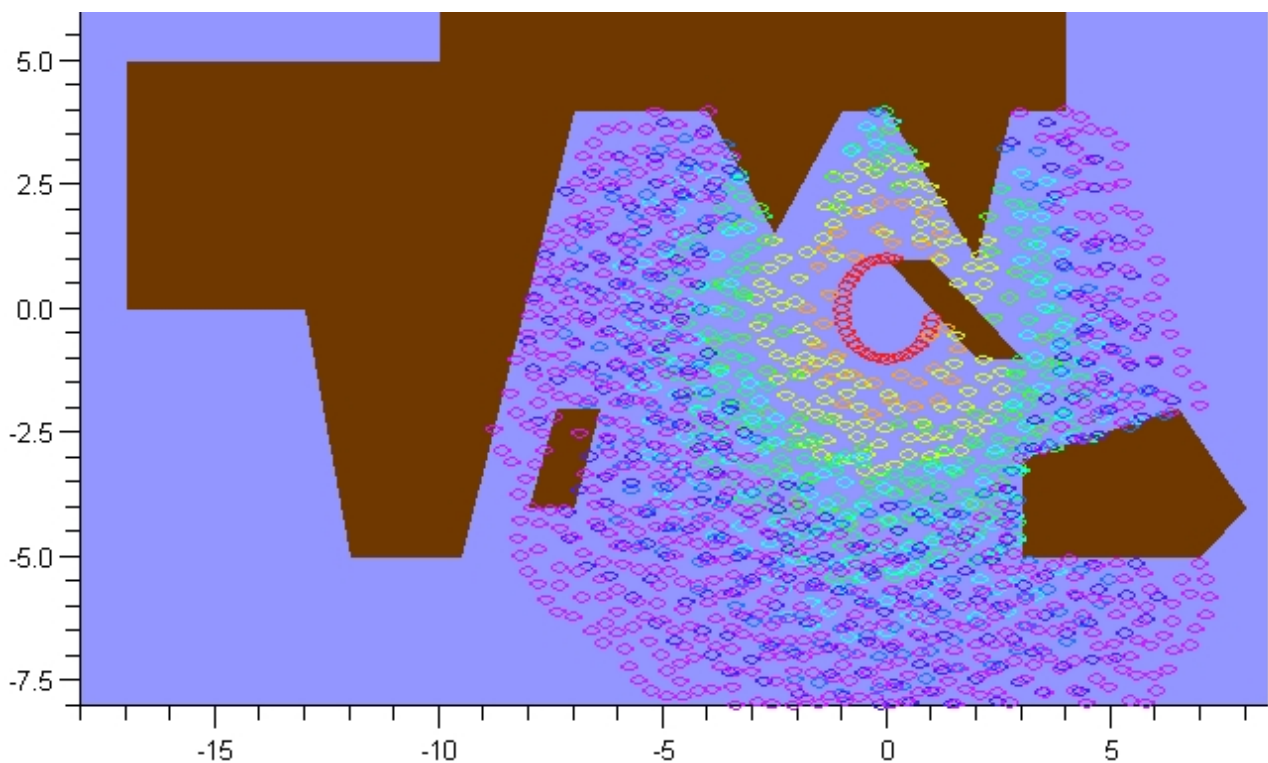
|          |                   |                     |                             |                           |                                    |
|----------|-------------------|---------------------|-----------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| 1 source | $\theta = \pi/20$ | $\Delta t = 3600$ s | Profondeur = $9 * \Delta t$ | $\varepsilon \approx 0.5$ | $k \approx 8 \leftrightarrow 25\%$ |
|----------|-------------------|---------------------|-----------------------------|---------------------------|------------------------------------|

Code : `modele_2_it(x0,y0,3600, Pi/20 , 5 , 8 ,0.5);`

Après 5 heures :



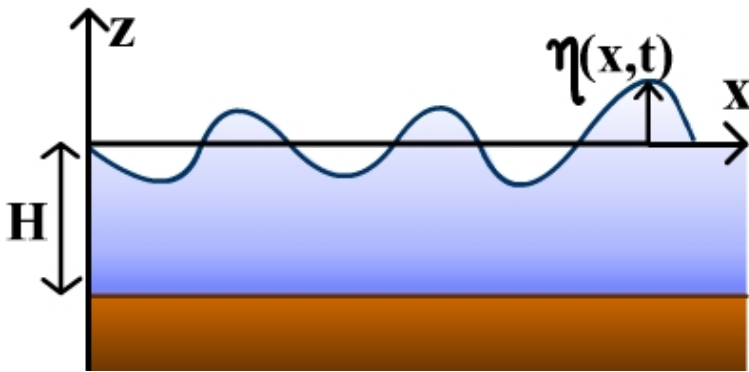
Après 9 heures :





### III. Théorie plus élaborée - Eléments finis

#### III.1. Système d'équation - Korteweg de Vries



##### Hypothèses

- Fluide parfait
- Ecoulement irrotationnel
- Ecoulement incompressible
- Pression atmosphérique constante
- Champ de pesanteur uniforme
- Les forces exercées à la surface par le vent sont négligées

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + gH \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + gH \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Recherche de solutions sous diverses formes -> **Echec**

➤➤ Ce système se résout par la méthode des éléments finis

\***Problème** : Cette méthode est complexe en dimension 3

➤➤ Simplification : mouvement unidirectionnel

**Equation Korteweg-de-Vries**

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{A_0} \eta\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\beta}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

$$\text{où } \alpha = \frac{A_0}{H} \quad \beta = \frac{H^2}{\lambda^2}$$

#### III.2. Méthodes des éléments finis

Modèle de discrétisation retenu :

En temps

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) \leftrightarrow \frac{\eta_k^{j+1} - \eta_k^j}{\Delta t}$$

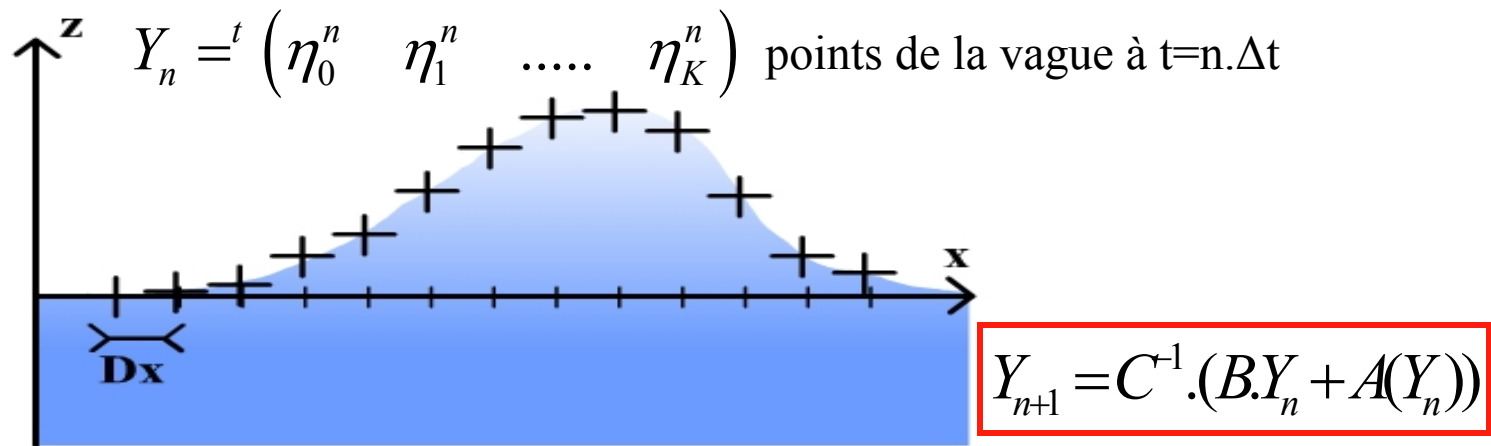
En espace

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t) \leftrightarrow \frac{\eta_{k+1}^j - \eta_k^j}{\Delta x}$$

où

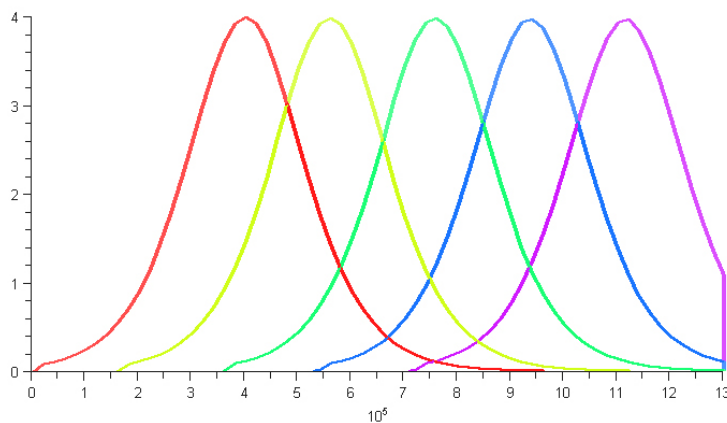
$$\eta_k^j = \eta(k \cdot \Delta x, j \cdot \Delta t)$$

## Calcul :



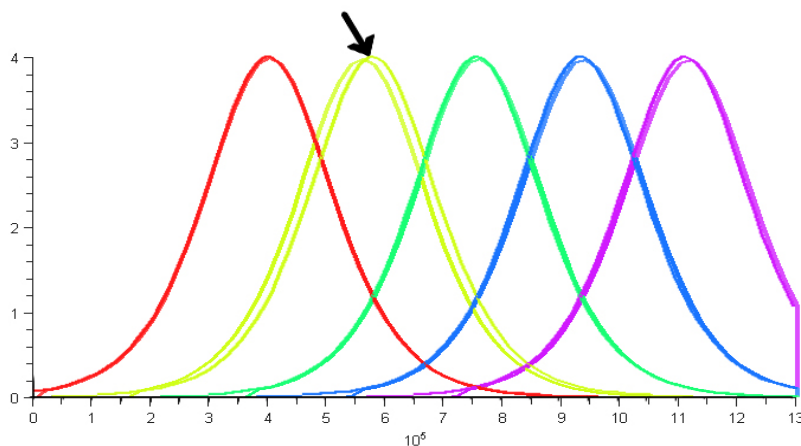
## Résultats numériques :

|                   |                          |                  |                            |                            |
|-------------------|--------------------------|------------------|----------------------------|----------------------------|
| $A_0 = 4\text{m}$ | $\lambda = 300\text{km}$ | $H = 4\text{km}$ | $\Delta x = 20 \text{ km}$ | $\Delta t = 100 \text{ s}$ |
|-------------------|--------------------------|------------------|----------------------------|----------------------------|



Affichage de l'onde solution toutes les 15', de  $t=0$  jusqu'à  $t=1 \text{ h}$

## Comparaison avec l'onde solitaire (solution exacte)

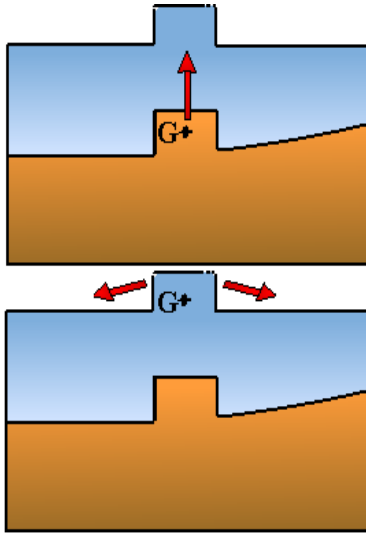


$$\eta(x,t) = \frac{A_0}{ch^2\left(\sqrt{\frac{3A_0}{4H^3}}(x-ct)\right)}$$

- On a bien obtenu une onde similaire à l'onde solitaire
- Il y a des pertes numériques, un phénomène d'atténuation, l'onde obtenue a une plus faible amplitude.

## IV. Relation Magnitude/Hauteur initiale grâce à l'Energie

### IV.1. Energie disponible



$$W_1 = \rho_{eau} g S \delta h H$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \rho_{eau} g S \delta h \left( H - \frac{\delta h}{2} \right)$$

$$E = W_1 - W_2 = \frac{1}{2} \rho_{eau} g S (\delta h)^2$$

Soit  $E_T = k \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot \varepsilon^{\frac{2}{3}} \left( \frac{M_0}{\mu} \right)^{\frac{4}{3}}$  avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u : \text{Déplacement de la plaque} \\ M_0 : \text{Moment des forces de contraintes} \\ \varepsilon = \Delta u / L \text{ déformation relative de la plaque} \\ L : \text{Longueur de la faille} \\ \mu : \text{rigidité de la plaque} \end{array} \right.$$

### IV.2. Relation Magnitude - Hauteur initiale

Énergie du soliton de hauteur  $A_0$  :  $E_s = \rho_{eau} \cdot g \cdot \frac{(A_0 \cdot H)^{3/2}}{\sqrt{3}} l$

Il vient :  $A_0 = \left( \frac{k}{l} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{H} \cdot \varepsilon^{\frac{4}{9}} \cdot \left( \frac{M_0}{\mu} \right)^{\frac{8}{9}}$

Or magnitude et moment sismique sont reliés :  $M_w = \frac{2}{3} \log(M_0) - 6.0$

➤ Au final :

$$A_0 = \left( \frac{k}{l} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{H} \cdot \varepsilon^{\frac{4}{9}} \cdot \left( \frac{10^{\frac{3}{2}(M_w + 6.0)}}{\mu} \right)^{\frac{8}{9}}$$